

引用格式:陈涛. 分数卷积灰色预测模型及其在信息传播中的应用[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2024, 31(03):73-84.  
文章编号:1673-4793(2024)03-0073-12

# 分数卷积灰色预测模型及其在信息传播中的应用

陈涛

(中国传媒大学数据科学与智能媒体学院, 北京 100024)

**摘要:**通过构造累加生成卷积序列的离散卷积运算实现了数据序列的累加生成,并推广到分数阶卷积幂以实现分数阶累加生成。离散序列卷积运算统一了累加生成和累减生成,给定阶数即可生成相应的卷积序列。引入离散卷积运算,可以从信号处理的角度来理解累加生成。累加生成系统可视为一个线性滤波器,累加卷积序列的本质是滤波器的单位冲击响应,卷积运算对应滤波过程。在分数累加卷积序列的基础上构建了分数阶灰色预测模型。最后给出数值实验和信息传播中的实际应用案例验证理论的正确性和方法的有效性。

**关键词:**灰色系统理论;累加生成;分数阶GM(1,1)模型;网络舆情;时间序列

**中图分类号:**N941.5 **文献标识码:**A

## Grey model based on fractional sequence convolution and its application in information communication

CHEN Tao

(School of Data Science and Intelligent Media, Communication University of China, Beijing 100024, China)

**Abstract:** The discrete convolution operation of accumulation generation convolution sequences was constructed to fulfill the accumulation generation of data sequence, and then was extended to the fractional order convolution power to implement the fractional accumulation generation. The discrete sequence convolution operation unified the accumulation generation and the reduction generation, and the corresponding convolution sequence could be generated as long as the order was given. The accumulation generation system could be viewed as a linear wave filter, and the essence of the convolution sequence was unit shock response of the filter, and the convolution operation corresponds to the filtering process. Then, a fractional order grey forecasting model was established based on the fractional accumulated convolution sequence. Finally, numerical experiments and practical application cases in information communication were given to verify the correctness of the theory and the effectiveness of the method.

**Keywords:** grey system theory; accumulation generation; fractional order GM(1,1) model; Online public opinion; time series

### 1 引言

大数据和人工智能时代下移动互联网和新媒体的飞速发展,颠覆了人们获取信息的方式,使人们获

取信息变得更加便捷,这极大地加速了信息的传播,延拓了信息的传播范围,信息的传播影响力也日益增大。根据2024年3月,中国互联网络信息中心(CNNIC)发布的第53次中国互联网络发展状况统计

报告,截至2023年12月,中国网民规模达到10.92亿人,互联网普及率达77.5%,其中手机网民规模达10.91亿人,占中国网民总数的99.9%<sup>[1]</sup>。中国网民的规模如此庞大,使互联网成为我国信息传播的主阵地。研究互联网上信息的传播规律构成信息传播研究的主要内容。社交网络平台如微博、微信使人们可以非常便捷地获取、评论和转发信息,形成网络舆情。网络舆情是网民通过以互联网对事件所表达出的情感、态度、意见、观点等<sup>[2]</sup>,他们之间的互动影响信息的传播,推进事件的演化发展。网络舆情是社会舆论在互联网空间的映射,是社会舆论中最活跃、最尖锐的一部分。当今突发舆情事件频发,虚假和不良信息充斥网络,给国家社会的安全和稳定来隐患。这些信息如不能得到及时妥当的应对和处理,将可能会导致不良后果。所以,信息在网络上传播规律的研究变得愈发重要性和迫切性。

信息在网络上的传播和流行病在社会上的传播有一定的相似之处,因此有很多网络信息传播模型借鉴于传染病模型。Daley和Kendal对比分析了谣言传播和流行病传播之间的相似性和差异性<sup>[3]</sup>,引入了随机性提出了随机谣言传播模型<sup>[4]</sup>。随后学者们引入复杂网络理论研究传播网络的拓扑结构对信息传播动力学的影响<sup>[5]</sup>。Zanette研究了小世界网络上的静态的<sup>[6]</sup>和动态的谣言传播模型<sup>[7]</sup>。Moreno等<sup>[8]</sup>研究无标度网络上的谣言传播动力学,通过随机方法求出了平均场方程的数值解,发现了谣言与传染病不同之处,传染病在均匀网络中传播时存在阈值,而谣言不存在阈值。潘灶烽等<sup>[9]</sup>在幂律度分布和可变聚类系数的无标度网络上研究谣言的传播规律,发现网络的聚类系数越高,越容易遏制谣言的传播。杨妹等<sup>[10]</sup>使用社会网络的方法分析微博转发网络的全局特征、网络结构特征和节点影响力,识别出信息网络中的核心节点,并运用LDA主题提取和SnowNLP情感分析技术对意见领袖的文本信息进行分析。Sudbury<sup>[11]</sup>借用传染病SIR模型研究谣言的传播。陈波等<sup>[12]</sup>增加了带有直接免疫的节点而提出了SEIR舆论传播控制模型。陈静<sup>[13]</sup>综合了SIS和SIR两种传染病模型,并加入治疗状态节点C,提出了线上SICRS网络传播模型。陈福集等<sup>[14]</sup>考虑话题衍生率提出SEIRS模型。袁信等<sup>[15]</sup>在SIR模型的基础上对传播节点的状态做出改进,考虑到人们对信息的反应,增加了对立观点持有者节点和沉默者节点,构建出SNIIR信息传播模型,并在无标度网络,小世界社交网络和随机社交网络上分析该模型

的传播力、节点分布等性能指标。这些方法是从微观的角度研究网络信息的传播规律,刻画网络节点(信息传播的个体)在复杂网络结构中的相互作用和对信息传播的贡献。

众所周知,网络舆情事件具有突发性强,传播速度快,传播范围广等特点,从出现危机征兆到造成可感知损失间隔的时间往往很短,这要求网络信息应急管理部门必须在突发危机事件发生之后很短的时间内迅速做出正确的决策和反应。另外,互联网虽然具有海量的数据,但可用信息的密度低,观察变量值经常出现缺失,重复或者异常。通过网上采集到的样本数据还会存在偏差,只能代表在线上活跃的用户,而对大部分沉默的网民的状态由于没有数据或者数据太少而无法得知<sup>[16]</sup>。为此,决策部门必须基于已经掌握的有限信息,预测未来网络信息传播的发展趋势,以便及时地作出科学的决策,化解危机并引导信息传播向好的方面发展。事件发生之后,在很短的时间内,决策部门掌握的信息量是有限的,具有“少数据”和“贫信息”的特征。此外,由于网络环境复杂多变,影响事件发展的因素很多,事件的演变过程呈现出很大的不确定性。综上所述,网络信息传播的问题可以视为一个“少数据”和“贫信息”的不确定性系统的问题。灰色系统理论是专门解决“少数据”和“贫信息”的不确定性系统问题的理论,因此,将灰色系统理论引入到信息传播领域,根据信息传播数据的特征,建立适合描述和预测信息传播规律的信息传播灰色系统模型,为信息传播的研究提供新理论支撑和方法论。

一般而言,要对系统行为作出预测首先需要知道系统的变化规律。这通常需要建立一套描述系统变化的数学模型,模型中含有待估计的未知参数。然后根据观测数据估计未知参数,从而获得可以模拟和预测系统变化的数学模型。因此,系统预测的核心是定义数学模型和模型的参数估计<sup>[17]</sup>。针对“少数据”和“贫信息”的不确定性,邓聚龙(Deng Julong)教授提出了灰色系统理论<sup>[18]</sup>,解决了粮食生产的长期预测问题。灰色系统理论已经被广泛应用于科学和工程技术,能源,交通控制,医疗健康,经济,管理,生态,农业等领域,并且取得了重大的经济效益<sup>[19]</sup>。区别于直接采用原始数据进行建模的传统方法,如统计学方法和机器学习方法等,灰色预测模型是建立在经过累加生成算子等灰色系统算子作用后所生成的中间数据之上<sup>[20]</sup>。累加生成算子对原始序列的作用在一定程度上消除了原始数据的波动性,生成后的数据近

似满足准指数律。许多社会系统,经济系统和生态系统等都可以视为广义的能量系统,能量的传输和转化满足幂指数法则,因此适合用灰色系统模型来刻画<sup>[21]</sup>。在信息传播领域中,也有类似的概念。例如对新闻事件报道的发稿量、微博的点击浏览次数、评论条数和转发次数等,这些因素都是具有累加意义的变量,它们共同影响了信息传播的特征状态,对了解信息传播网络状态和分析信息传播效果起到关键的作用。有部分学者发现了网络舆情的特点和灰色系统的关联,开始使用灰色系统的理论和方法研究网络舆情的变化规律。李耘涛等<sup>[22]</sup>运用基于白化函数的多指标灰色评价方法对网络舆情预警的指标体系进行评价。潘崇霞<sup>[23]</sup>在使用灰色层次分析法预测网络舆论的话题。李文杰等<sup>[24]</sup>应用灰色预测模型GM(1,1)模型预测网络舆情事件的点击次数和评论数量,并将这些变量作为舆情预警的指标。张和平等<sup>[25]</sup>利用几何平均弱化缓冲算子处理舆情数据,然后构建基于马尔科夫过程的灰色Verhulst非线性模型,对热门的网络舆情事件的百度指数时间序列进行建模和预测。史蕊等<sup>[26]</sup>基于粒子群算法优化模型参数,构建了GM(1,1)幂模型的组合灰色模型,能够较好预测非线性的网络舆情热度时间序列。陈培友等<sup>[27]</sup>运用网络层次分析法(ANP)和灰色模糊评价法构建社交网络舆情风险预警模型,实现社交网络舆情风险的有效预警。崔舒<sup>[28]</sup>为综合使用几何加权平均弱化缓冲算子(GAWBO)、对数灰色模型LGM(1,1)、三参数灰色模型TPGM(1,1)和最小二乘支持向量机(LSSVM)构建了混合预测模型,并对热门的网络舆情事件的百度指数进行建模和预测,混合模型的预测精度高于传统的单一模型。滕婕等<sup>[29]</sup>考虑民众关注(舆情事件的转发量、评论量和点赞量)和舆情态度(原创信息量变量率和搜索量变化率)的两大舆情危机评价指标作为自变量数据序列,并采用新陈代谢的思想即新旧数据不断更替,建立马尔科夫多变量GM(1,N)动态模型,预测舆情危机事件的新浪微指数的特征数据序列。栗琪和闫书丽等考虑了网络舆情数据的时滞效应、周期波动、新信息优先和非线性变化的特征<sup>[30]</sup>,分别建立了相应的多变量时滞离散灰色模型<sup>[31]</sup>、周期波动灰色分解集成模型<sup>[32]</sup>、新信息优先灰色模型<sup>[33]</sup>、多变量阻尼累积灰色模型<sup>[34]</sup>。这些工作丰富灰色系统理论体系,拓展灰色系统应用领域,为信息传播建模提供新思路和新方法。

刘思峰等<sup>[35]</sup>提出了灰色序列算子的概念,并且把

累加生成过程视为序列算子的作用,称为累加生成算子。高阶累加生成算子是累加生成算子反复作用的自然结果,例如,累加生成算子连续作用 $m$ 次可以产生 $m$ 阶累加生成算子。累加生成算子可以使序列满足幂指数法则,但是过度使用累加生成算子也会破坏幂指数法则。分数阶累加生成是整数阶累加生成的扩展,蕴含“介于整数阶中间”的思想。Wu等<sup>[36]</sup>将累加生成算子化为一个矩阵,那么,整数 $m$ 阶累加生成算子就被转化为矩阵的整数 $m$ 次幂。基于矩阵的幂运算,可以得到整数 $m$ 阶累加生成算子的显式表达式。这个结果可以推广到分数阶累加生成算子的显式表达式,从而建立了分数阶累加灰色预测模型。因为分数阶累加灰色预测模型能够很好地提高模型预测精度,它在近年来受到较大的关注<sup>[37-39]</sup>。Mao等<sup>[40]</sup>使用矩阵分析的方法研究了分数累加灰色模型的建模机制。曾波等<sup>[41-43]</sup>把累加阶数推广到任意实数阶。吴正鹏等<sup>[44-46]</sup>进一步将累加阶数推广到任意的复数阶。随着累加阶数的搜索范围扩大到复数域,可能会找到比在实数轴上更优的累加阶数。然而,复数阶累加会产生复数序列,导致灰色预测模型的参数估计出现复数参数,所以模型的时间响应也变成复数序列,而原来的时间序列均为实数列。虽然累加生成算子的引入已经有一段时间并且得到广泛的应用,但是关于它的机制的研究却很少。陈超英<sup>[47]</sup>使用卷积变换改进累加生成过程,并指出卷积变换能够提高数据序列的光滑度。Wei等<sup>[48]</sup>引入了积分匹配的方法解释累加生成算子是连续函数用分段常数逼近后进行积分而得到的离散形式。Lin等<sup>[49]</sup>采用谱分析方法对累加生成算子的机制进行定量地研究。这些工作加深对累加生成过程和灰色预测模型的理解。

卷积是信号处理中强有力的工具<sup>[50]</sup>。本文引入离散序列卷积,通过构造累加生成卷积序列来实现累加生成,并推广到分数阶累加生成。首先,离散卷积运算被引入到累加生成的过程中,把累加生成算子视为一个线性时不变系统,称为累加生成系统,称该系统的单位冲击响应为一阶累加生成卷积序列,这就是累加生成算子在时间域的离散形式。因此,得到一种新的视角理解累加生成算子的本质。累加生成算子可以视作一个线性滤波器,其单位冲击响应是累加生成卷积序列。累加生成的过程对应滤波过程,即原序列和累加生成卷积序列做卷积。然后,考虑累加生成卷积序列自身做分数阶卷积幂得到分数阶累加生成卷积序列,证明分数阶累加生成系统的单位冲击响应

就是分数阶累加生成卷积序列,它就是分数阶累加生成算子在时间域的离散形式。理论上,分数阶累加生成卷积序列及其逆卷积序列互为逆序列,它们在数据变化过程中不引入额外误差。通过指定负分数阶可以直接计算出分数阶累加生成的逆卷积序列,而不需要先凑齐整数阶累加再做整数阶累减。在分数阶累加卷积序列的基础上建立分数阶序列卷积的灰色预测模型。最后,通过数值实验和信息传播领域的实际案例验证了分数阶卷积灰色预测模型的正确性和有效性。

## 2 基于离散卷积的累加生成

**定义1.** 设  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  为原序列,累加生成算子定义如下<sup>[5]</sup>:

$$AGO(x^{(0)}[n]) = \sum_{k=0}^n x^{(0)}[k] = x^{(1)}[n], n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

其中,  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  表示一个长度为  $N$  的序列,其下标  $n$  从 0 到  $N-1$  变化。 $x^{(0)}[n]$  表示序列中的一个数据。数据的上标表示累加的阶数,比如  $x^{(0)}$  是原数据,视为零阶累加数据;而  $x^{(1)}$  表示一阶累加数据。

连续使用累加生成算子作用  $m$  次自然产生了  $m \in N$  (自然数集) 阶累加生成算子:

$$AGO^m(x^{(0)}[n]) = AGO(x^{(m-1)}[n]) = x^{(m)}[n], \quad (2)$$

**定义2.** 设  $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$  和  $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$  是长度均为  $N$  的序列,它们的离散卷积定义如下<sup>[51]</sup>:

$$x[n]*y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] \cdot y[n-k]. \quad (3)$$

从定义2可以看出,离散序列卷积是可交换的运算,即  $y[n]*x[n] = x[n]*y[n]$ 。

**定义3.** 定义序列  $\{\delta[n]\}_{n=0}^{N-1}$  为单位冲击序列(非负时间部分)<sup>[51]</sup>:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (4)$$

根据定义2和定义3,可得单位冲击序列在离散卷积运算中的不变性,即  $x[n]*\delta[n] = x[n]$ 。因此,  $\{\delta[n]\}_{n=0}^{N-1}$  可视为离散序列卷积运算中的单位元。进一步,可得序列平移公式,即对任意正整数  $m$ ,有:

$$x[n]*\delta[n-m] = x[n-m]. \quad (5)$$

**定义4.** 设  $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$  和  $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$  是长度均为  $N$  的序列。若  $x[n]*y[n] = \delta[n]$ , 则称它们互为逆卷积

序列,记为  $x[n] = y^{-1}[n]$ 。

根据上述定义,可将定义1的累加生成算子表示为离散序列卷积的形式。因为传统的累加生成算子  $AGO(\cdot)$  使用大写字母表示,为了区别,将累加卷积序列用小写字母表示为  $ago[n]$ 。

**定理1.** 设原序列为  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 按定义1的一阶累加序列为  $\{x^{(1)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 。那么,一阶累加生成的过程(1)可以表示为离散序列卷积的形式:

$$x^{(0)}[n]*ago[n] = x^{(1)}[n]. \quad (6)$$

其中,  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  称为累加生成卷积序列<sup>[52]</sup>, 其具体形式如下:

$$ago[n] = \sum_{k=0}^n \delta[k], \quad (7)$$

证明详见参考文献[52]。

根据(7),累加生成卷积序列是恒为1的序列,长度为  $N$ , 即  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1} = \{1, 1, \dots, 1\}$ 。

**定义5.** 设  $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$  为长度为  $N$  的序列,自身做离散卷积  $k$  次,其中  $k$  为正整数,称为卷积幂:

$$x[n]*x[n]*\dots*x[n] = x^{k*}[n]. \quad (8)$$

规定任意序列的零阶卷积幂为单位元,即  $x^{0*}[n] = \delta[n]$ 。

例如,

$$\begin{aligned} \delta^{0*}[n-1] &= \delta[n], \quad \delta^{1*}[n-1] = \delta[n-1], \quad \delta^{2*}[n-1] = \\ &= \delta[n-1]*\delta[n-1] = \delta[n-2], \\ \delta^{k*}[n-1] &= \delta^{(k-1)*}[n-1]*\delta[n-1] = \delta[n-k]. \end{aligned} \quad (9)$$

比较(7)和(9),累加生成卷积序列  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  可以表示为卷积幂级数的前  $n$  项和,即,

$$ago[n] = \sum_{k=0}^n \delta^{k*}[n-1]. \quad (10)$$

将累加生成卷积序列  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  和  $\{\delta[n] - \delta[n-1]\}_{n=0}^{N-1}$  做离散卷积结果是单位冲击序列:

$$ago[n]*(\delta[n] - \delta[n-1]) = \delta[n]. \quad (11)$$

故  $\{\delta[n] - \delta[n-1]\}_{n=0}^{N-1}$  是  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  的逆序列,记为  $\{ago^{-1}[n]\}_{n=0}^{N-1} = \{1, -1, 0, \dots, 0\}$ 。

由式(11),将一阶累加生成卷积序列  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  拓展到整数阶累加生成卷积序列  $\{ago^{m*}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 其中  $m \in Z^+$  (正整数集)。首先有:

$$ago^{m*}[n]*ago^{-m*}[n] = \delta^{m*}[n] = \delta[n]. \quad (12)$$

使用广义牛顿二项式定理,可得:

$$ago^{m*}[n] = (\delta[n] - \delta[n-1])^{-m*} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} \delta^{k*}[n-1], \quad (13)$$

其中,  $\binom{-m}{k}$  是广义组合数:

$$\binom{-m}{k} = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!}. \quad (14)$$

由式(4)和式(9),可得累加生成卷积序列的正整数  $m$  阶卷积幂为:

$$ago^{m*}[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{m+i}{1+i}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

类似的,可得累加生成卷积序列的负整数  $-m$  阶卷积幂为:

$$ago^{-m*}[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{-m+i}{1+i}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

由式(15)和(16)表达形式统一,因此可得如下定理统一整数阶累加生成卷积序列及其推广。

**定理 2.** 设  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  是累加生成卷积序列,那么整数  $m$  阶累加生成卷积序列为:

$$ago^{m*}[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{m+i}{1+i}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

**推论.** 设  $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$  是累加生成卷积序列,那么它的实数  $r \in R$  (实数集)阶卷积幂为:

$$ago^{r*}[n] = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r+i}{1+i}, & n \geq 1. \end{cases} \quad (18)$$

### 3 基于分数阶累加卷积序列的灰色预测模型

给定原序列  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  和累加生成阶数  $r$ , 根据离散序列卷积定义 2 和定理 2 推论,累加后的序列可表示为原序列与累加卷积序列的  $r$  阶卷积幂  $\{ago^{r*}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  的卷积,因此有定义 6。

**定义 6.** 给定原始序列  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 和累加阶数  $r$ , 那么,  $r$  阶累加生成后的序列  $\{x^{(r)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  定义为原序列  $\{x^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  与累加生成卷积序列的  $r$  阶卷积幂  $\{ago^{r*}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  的离散卷积:

$$x^{(r)}[n] = x^{(0)}[n]*ago^{r*}[n]. \quad (19)$$

假设  $\{x^{(r)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$  是连续函数  $x^{(r)}(t)$  的等距抽样序列,其中  $x^{(r)}(t)$  满足如下常微分方程:

$$\frac{dx^{(r)}}{dt} = c_1 x^{(r)}(t) + c_2, \quad (20)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  是待定参数。给定的序列  $\{x^{(r)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 确定方程中的未知参数  $c_1$  和  $c_2$ 。

在时间子区间  $[n-1, n]$  上,对方程(20)两边同时对  $t$  积分,可得:

$$x^{(r)}[n] - x^{(r)}[n-1] = \int_{n-1}^n (c_1 x^{(r)}(t) + c_2) dt. \quad (21)$$

采用梯形公式近似积分,可得方程(20)的离散形式:

$$x^{(r)}[n] - x^{(r)}[n-1] = 0.5c_1 (x^{(r)}[n-1] + x^{(r)}[n]) + c_2 \quad (22)$$

式(22)称为基于卷积的  $r$  阶累加灰色模型,记为  $GM^{r*}(1, 1)$ 。其中,上标  $r^*$  表示累加生成卷积序列的  $r$  阶卷积幂。当  $r=1$  时,就是经典的  $GM(1, 1)$  模型。当  $n$  取  $1, \dots, N-1$  时,方程(22)是一个线性方程组:

$$Ac=d, \quad (23)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5(x^{(r)}[0] + x^{(r)}[1]) & 1 \\ 0.5(x^{(r)}[1] + x^{(r)}[2]) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0.5(x^{(r)}[N-2] + x^{(r)}[N-1]) & 1 \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} x^{(r)}[1] - x^{(r)}[0] \\ x^{(r)}[2] - x^{(r)}[1] \\ \vdots \\ x^{(r)}[N-1] - x^{(r)}[N-2] \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

线性方程组(23)包含了  $N-1$  方程,但只有两个未知参数  $c_1$  和  $c_2$ 。一般  $N-1 > 2$ , (23) 是一个超定方程组。因此,方程(23)的解通常是在最小二乘意义下的近似解,它等价于求解法方程:

$$A^T A c = A^T d. \quad (24)$$

因此,未知参数的最小二乘估计为:

$$\hat{c} = (A^T A)^{-1} A^T d. \quad (25)$$

由于方程(20)的解为:

$$x^{(r)}(t) = \left( x^{(r)}(0) + \frac{c_2}{c_1} \right) e^{c_1 t} - \frac{c_2}{c_1}. \quad (26)$$

将最小二乘估计的参数(25)代入方程解(26),可得  $GM^{r*}(1, 1)$  的时间响应:

$$\hat{x}^{(r)}[n] = \left( x^{(r)}[0] + \frac{\hat{c}_2}{\hat{c}_1} \right) e^{\hat{c}_1 n} - \frac{\hat{c}_2}{\hat{c}_1}. \quad (27)$$

将时间响应 $\{\hat{x}^{(r)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 与累加生成卷积序列的 $-r$ 阶卷积幂 $\{ago^{-rs}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 做卷积运算,可以得到原序列的估计序列 $\{\hat{x}^{(0)}[n]\}_{n=0}^{N-1}$ :

$$\hat{x}^{(r)}[n] * ago^{(-rs)}[n] = \hat{x}^{(0)}[n]. \quad (28)$$

为了度量估计序列和原序列之间的误差,采用平均绝对百分比误差(MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{x^{(0)}[n] - \hat{x}^{(0)}[n]}{x^{(0)}[n]} \right| \times 100\%. \quad (29)$$

#### 4 数值实验和案例分析

**例1** (累加生成卷积序列的正数阶卷积幂). 设 $N = 8$ , 计算累加生成卷积序列的正数阶卷积幂 $\{ago^r[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 其中正数阶 $r = \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$ . 计算结果如表1和图1所示。

表1 累加生成卷积序列的正数阶卷积幂

n \ r	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	0.200	0.333	0.500	1.000	1.414	1.732	2.000	2.236
2	0.120	0.222	0.375	1.000	1.707	2.366	3.000	3.618
3	0.088	0.173	0.313	1.000	1.943	2.943	4.000	5.109
4	0.070	0.144	0.273	1.000	2.144	3.482	5.000	6.687
5	0.059	0.125	0.246	1.000	2.322	3.992	6.000	8.341
6	0.051	0.111	0.226	1.000	2.482	4.479	7.000	10.059
7	0.045	0.100	0.209	1.000	2.629	4.947	8.000	11.835
8	0.041	0.092	0.196	1.000	2.765	5.400	9.000	13.664

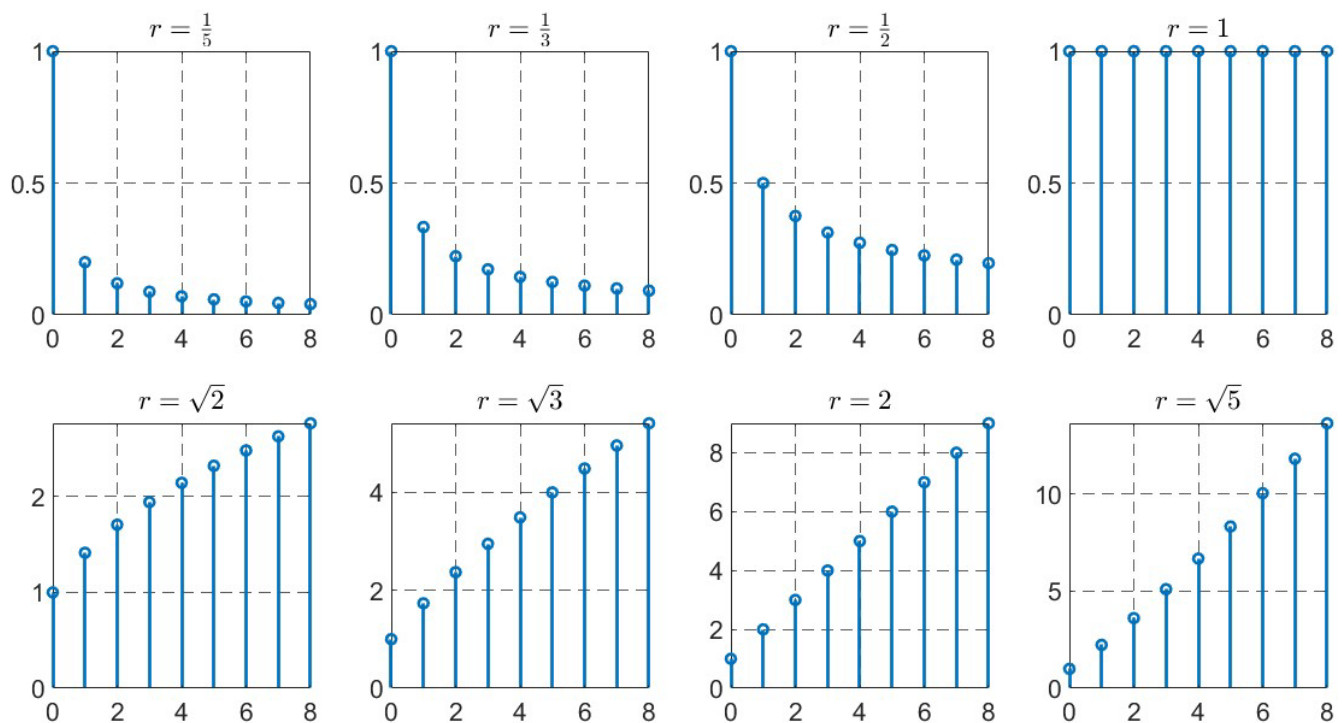


图1 累加生成卷积序列的正数阶卷积幂

**例 2** (累加生成卷积序列的负数阶卷积幂). 设  $N = 8$ , 计算累加生成卷积序列的负数阶卷积幂  $\{ago^r[n]\}_{n=0}^{N-1}$ , 其中不同的负数阶  $r = -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ ,

$-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2, -\sqrt{5}$ . 计算结果如表 2 和图 2 所示。

表 2 累加生成卷积序列的负数阶卷积幂

$n \backslash r$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-1$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$-2$	$-\sqrt{5}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	-0.200	-0.333	-0.500	-1.000	-1.414	-1.732	-2.000	-2.236
2	-0.080	-0.111	-0.125	-0.000	0.293	0.634	1.000	1.382
3	-0.048	-0.062	-0.063	-0.000	0.057	0.057	0.000	-0.109
4	-0.034	-0.041	-0.039	-0.000	0.023	0.018	0.000	-0.021
5	-0.026	-0.030	-0.027	-0.000	0.012	0.008	0.000	-0.007
6	-0.020	-0.023	-0.021	-0.000	0.007	0.004	0.000	-0.003
7	-0.017	-0.019	-0.016	-0.000	0.005	0.003	0.000	-0.002
8	-0.014	-0.016	-0.013	-0.000	0.003	0.002	0.000	-0.001

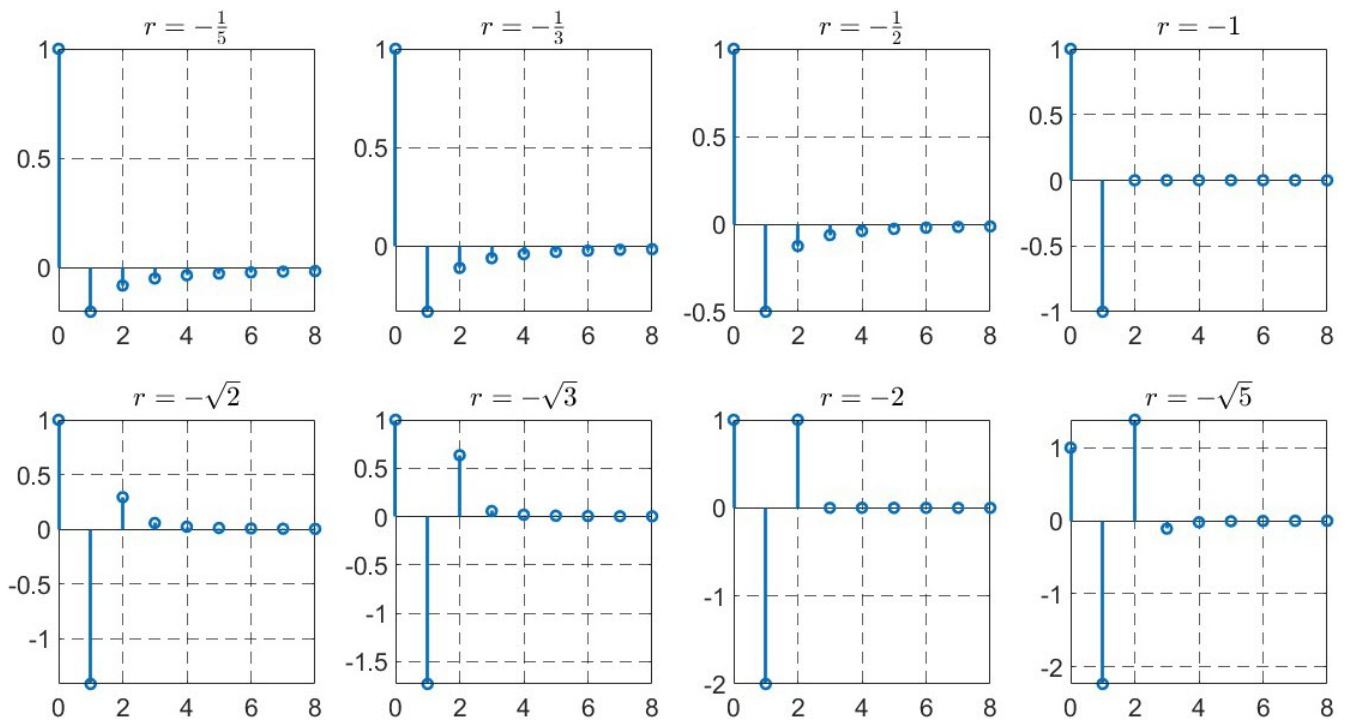


图 2 累加生成卷积序列的负数阶卷积幂

**例 3** (互为逆卷积序列). 计算例 1 中的累加生成卷积序列的正数阶卷积幂与例 2 中的累加生成卷积序列的负数阶卷积幂的卷积结果, 以验证它们互为逆卷积序列的关系, 验证  $ago^r[n] * ago^{-r}[n] = \delta[n]$ , 在不同阶数  $r = \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$  下成立, 结果在图 3 中展示。

**例 4.** 考虑原序列  $\{x^{(0)}[n]\}$  为从 2009-2023 年的中国网民人数(单位:亿人)<sup>[1]</sup>. 中国互联网信息中心每年 1 月和 7 月发布《中国互联网络发展状况统计报告》, 发布截止到上一年 12 月和当年 6 月的统计数据。从 2009 年到 2023 年共有 30 个数据点, 见表 3 和图 4。表 4 和图 5 展示采用基于卷积的分数阶灰色模型  $GM^*(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对中国网民人数的建模和预测。

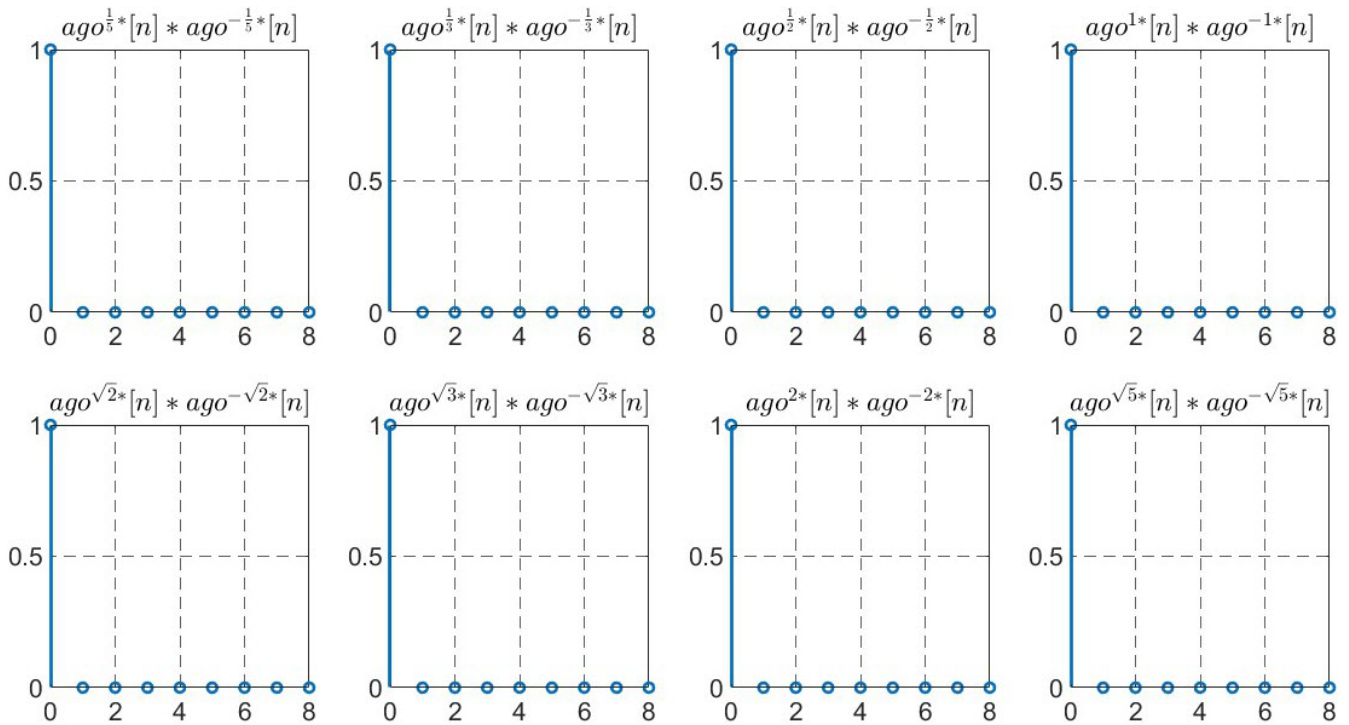


图3 累加生成卷积序列的 $r$ 阶卷积累 $ago^r[n]$ 及其逆序列 $ago^{-r}[n]$ 的卷积

表3 2009–2024年中国网民人数(单位:亿人)

年月	2009-6	2009-12	2010-6	2010-12	2011-6	2011-12	2012-6	2012-12	2013-6	2013-12
人数	3.38	3.84	4.20	4.57	4.85	5.13	5.38	5.64	5.91	6.18
年月	2014-6	2014-12	2015-6	2015-12	2016-6	2016-12	2017-6	2017-12	2018-6	2018-12
人数	6.32	6.49	6.68	6.88	7.10	7.31	7.51	7.72	8.02	8.29
年月	2019-6	2019-12	2020-6	2020-12	2021-6	2021-12	2022-6	2022-12	2023-6	2023-12
人数	8.54	9.04	9.40	9.89	10.11	10.32	10.51	10.67	10.79	10.92

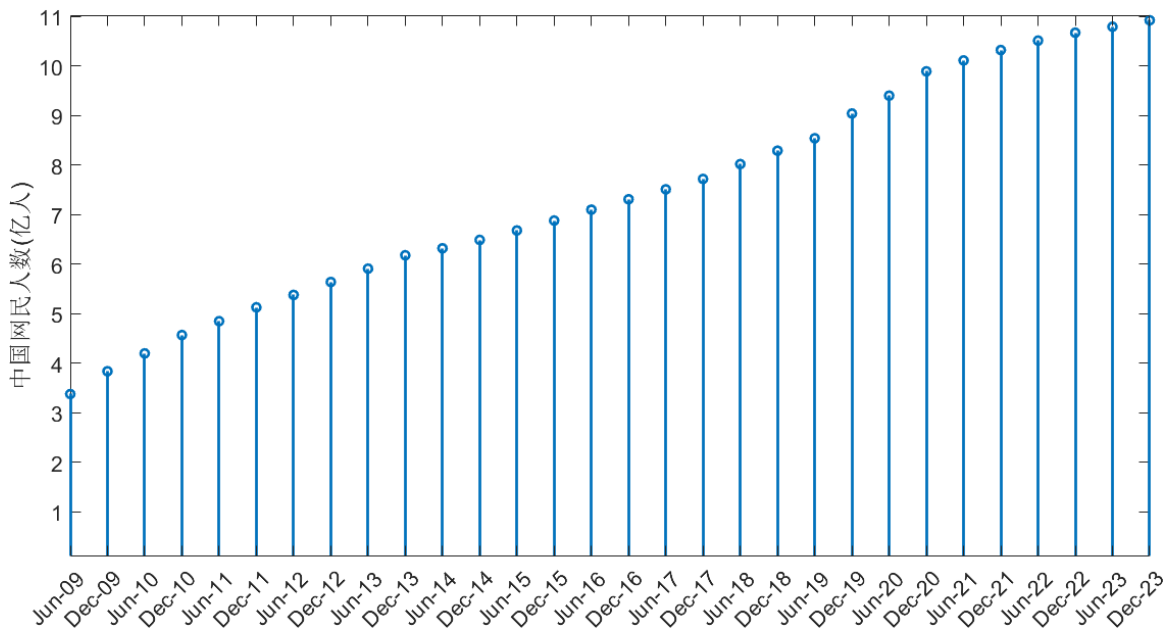


图4 2009–2024年中国网民人数(单位:亿人)



表4 基于卷积的分数阶灰色模型  $GM^{r^*}(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对中国网民人数的模拟和预测

$n$	$x^{(0)}[n]$	$GM(1,1)$	$GM^{0.847^*}(1,1)$	$n$	$x^{(0)}[n]$	$GM(1,1)$	$GM^{0.847^*}(1,1)$
0	3.3800	3.3800	3.3800	16	7.5100	7.5741	7.7041
1	3.8400	4.3950	3.8140	17	7.7200	7.8540	7.9598
2	4.2000	4.5574	4.1887	18	8.0200	8.1442	8.2201
3	4.5700	4.7258	4.5006	19	8.2900	8.4452	8.4855
4	4.8500	4.9004	4.7800	20	8.5400	8.7572	8.7562
5	5.1300	5.0815	5.0407	21	9.0400	9.0808	9.0325
6	5.3800	5.2692	5.2900	22	9.4000	9.4164	9.3148
7	5.6400	5.4639	5.5326	23	9.8900	9.7643	9.6033
8	5.9100	5.6658	5.7713	24	10.1100	10.1251	9.8983
9	6.1800	5.8752	6.0081	样本内	MAPE	2.5411%	1.5982%
10	6.3200	6.0923	6.2445	25	10.3200	10.4993	10.2001
11	6.4900	6.3174	6.4816	26	10.5100	10.8872	10.5089
12	6.6800	6.5509	6.7203	27	10.6700	11.2895	10.8251
13	6.8800	6.7929	6.9614	28	10.7900	11.7067	11.1488
14	7.1000	7.0439	7.2054	29	10.9200	12.1393	11.4803
15	7.3100	7.3042	7.4528	样本外	MAPE	6.1589%	2.2162%

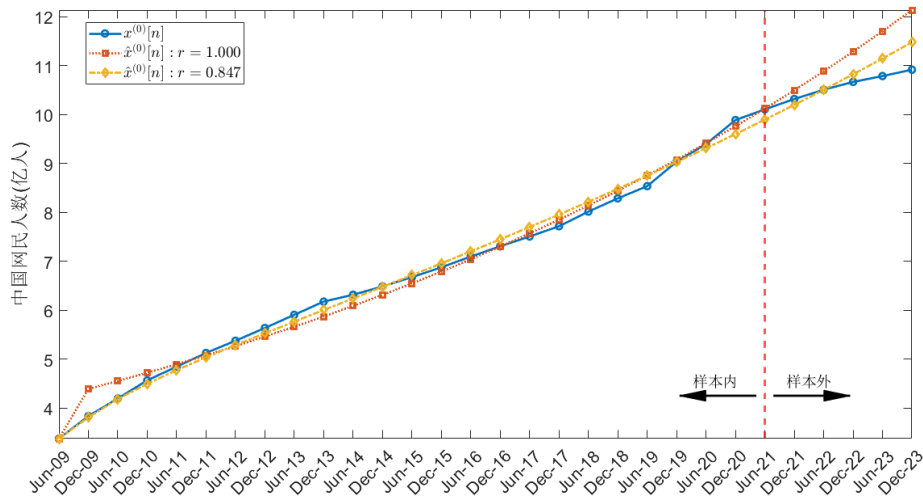


图5 基于卷积的分数阶灰色模型  $GM^{r^*}(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对中国网民人数的模拟和预测

例5. 考虑原序列  $\{x^{(0)}[n]\}$  为从2016年7月15日10:47电影《没有别的爱》官方声明发布之后的微博转发量数据<sup>[53]</sup>。从发布后1个小时开始,间隔2小时统计一次,

到发布后31个小时,共16个数据点,见表5和图6。表6和图7展示采用基于卷积的分数阶灰色模型  $GM^{r^*}(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对微博转发量的建模和预测。

表5 微博转发量(单位:次数)

时间	1	3	5	7	9	11	13	15
转发	1254	5402	8778	12154	14180	16109	17749	18232
年月	17	19	21	23	25	27	29	31
转发	19003	19486	21125	22862	24502	25273	26527	27588

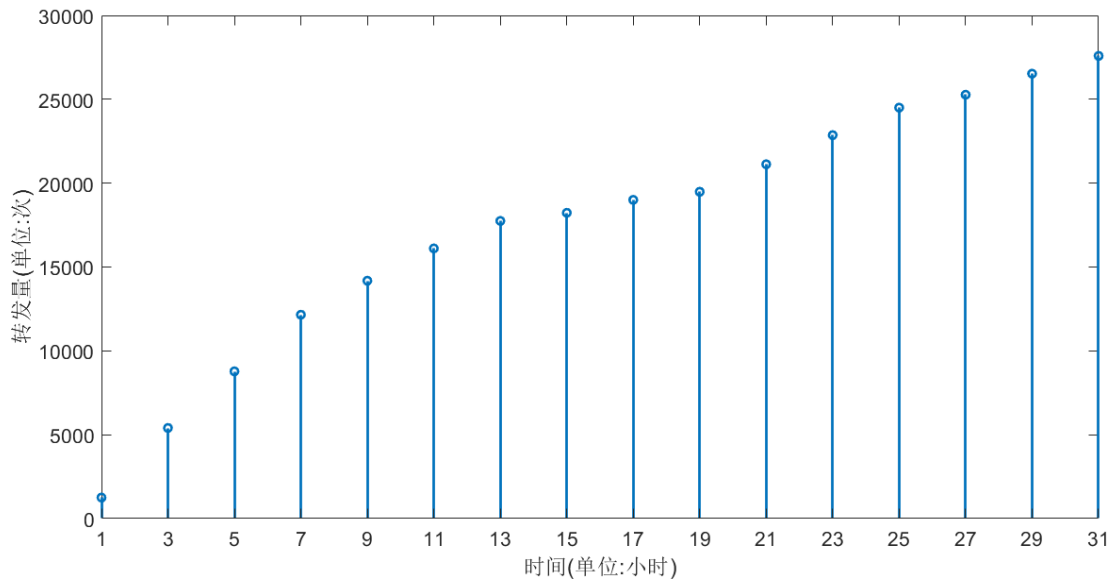


图6 微博转发量数据(单位:次)

表6 基于卷积的分阶灰色模型  $GM^{r*}(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对微博转发量的模拟和预测

$n$	$x^{(0)}[n]$	$GM(1,1)$	$GM^{0.537*}(1,1)$	$n$	$x^{(0)}[n]$	$GM(1,1)$	$GM^{0.537*}(1,1)$
0	1254	1254	1254	9	19486	19967	20572
1	5402	10074	6724	10	21125	21749	21808
2	8778	10974	9497	11	22862	23691	23010
3	12154	11953	11625	12	24502	25806	24185
4	14180	13021	13439	样本内	MAPE	13.2201%	5.3242%
5	16109	14183	15062	13	25273	28110	25336
6	17749	15449	16558	14	26527	30619	26470
7	18232	16828	17960	15	27588	33353	27588
8	19003	18331	19293	样本外	MAPE	15.8493%	0.1556%

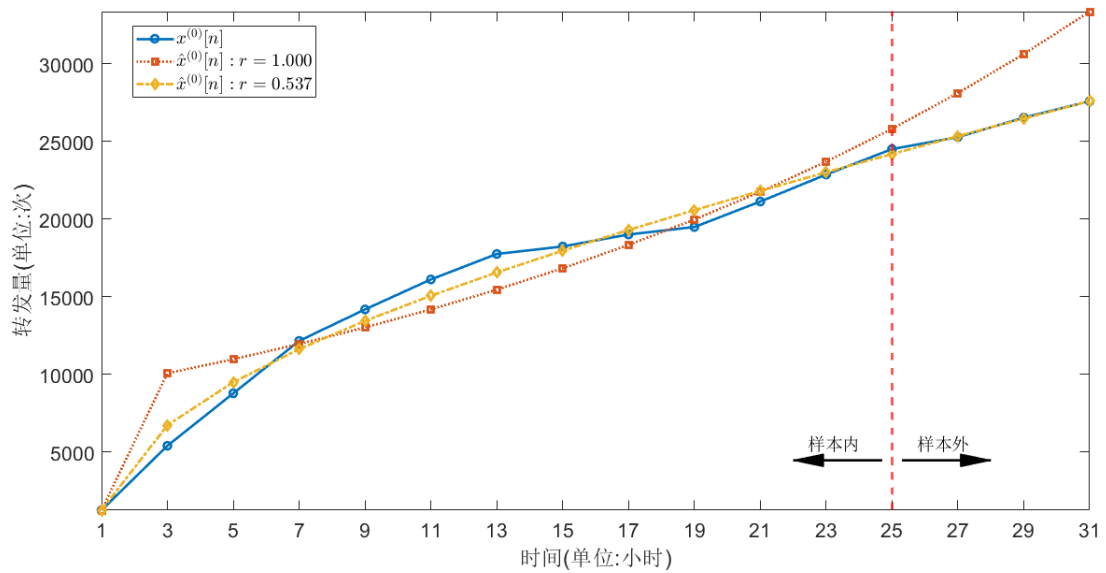


图7 基于卷积的分阶灰色模型  $GM^{r*}(1,1)$  和  $GM(1,1)$  模型对微博转发量的建模和预测

## 5 结论

累加生成和逆累加生成是灰色建模过程的关键步骤,它们可以基于离散序列卷积来实现。通过构造累加生成卷积序列的卷积幂可以实现任意阶数的累加生成。基于序列卷积可以建立分数阶累加灰色模型。主要结果总结如下。

(1)定理1使用单位冲击序列构造出累加生成卷积序列。传统的累加生成可以通过序列卷积来实现,即  $ago[n] * x^{(0)}[n]$  将产生累加后的序列  $x^{(1)}[n]$ ,而再和  $-1$  阶卷积序列做卷积,  $ago^{-1}[n] * x^{(1)}[n]$ ,则恢复为原序列。累加生成卷积序列和它的逆序列是互逆的卷积序列,即  $ago[n] * ago^{-1}[n] = \delta[n]$ 。

(2)定理2及其推论构造出累加生成卷积序列的分数阶卷积幂可以实现分数阶累加生成。累加序列的分数阶卷积幂和原序列卷积,即  $ago^{*r}[n] * x^{(0)}[n]$  将产生  $r$  阶累加生成后的序列  $x^{(r)}[n]$ ,而再和累加序列的  $-r$  阶卷积幂做卷积,即  $ago^{-r}[n] * x^{(r)}[n]$  则恢复为原序列。累加序列的  $r$  阶卷积幂和  $-r$  阶卷积幂是互逆的卷积序列,即  $ago^{*r}[n] * ago^{-r}[n] = \delta[n]$ 。

累加生成卷积序列及其逆序列是实现累加生成的新方法,它们在分数阶灰色模型  $GM^{*r}(1,1)$  的构建中起了关键的作用,这是它们的应用领域之一。可以在其它领域找到更多的应用。下面列出一些后续可能的研究方向:

(1)因为分数阶累加系统的单位冲击响应已经获得,数字信号处理的工具可以引入进来对分数阶累加系统做进一步的分析,以对分数阶累加生成的性质有进一步的了解。

(2)分数阶累加卷积序列和分数阶差分序列互为逆序列,因此可以应用于分数阶差分方程的求解中。

### 参考文献 (References):

- [1] 中国互联网信息中心. 第53次中国互联网络发展状况统计报告 [R/OL]. (2024-03-29) [2024-05-16]. <https://www.199it.com/archives/1682273.html>.
- [2] 吴树芳,朱杰. 网络舆情中的热点话题研究[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [3] Daley D J, Kendall D G. Epidemics and rumors [J]. Nature, 1964, 204: 1118.
- [4] Daley D J, Kendall D G. Stochastic rumors [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1965, 1(1): 42-55.
- [5] Zhou J, Liu Z, Li B. Influence of network structure on rumor propagation [J]. Physics Letters A, 2007, 368(6): 458-463.
- [6] Zanette D H. Critical behavior of propagation on small-world networks [J]. Physical Review E, 2001, 64: 050901.
- [7] Zanette D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks [J]. Physical Review E, 2002, 65: 110-126.
- [8] Moreno Y, Nekovee M, Pacheco A F. Dynamics of rumor spreading in complex networks [J]. Physical Review E, 2004, 69.
- [9] 潘灶烽,汪小帆,李翔. 可变聚类系数无标度网络上的谣言传播仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2346-2348.
- [10] 杨妹,王妍,王传彪,等. 突发事件网络的传播规律及特征——以知网事件为例[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2022, 29(06): 58-67.
- [11] Sudbury A. The proportion of the population never hearing a rumor [J]. Journal of Applied Probability, 1985, 22(2): 443-446.
- [12] 陈波,于冷,刘君亭,等. 泛在媒体环境下的网络舆情传播控制模型[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(11): 2140-2150.
- [13] 陈静. 复杂网络上基于流行病学的舆情传播模型及其规律研究[D]. 长春: 吉林大学, 2013.
- [14] 陈福集,陈婷. 基于SEIRS传播模型的网络舆情衍生效应研究[J]. 情报杂志, 2014, 33(2): 108-113+160.
- [15] 袁信,王永滨. 基于在线社交网络的信息传播模型研究[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2020, 27(06): 19-24+35.
- [16] 刘肖凡,吴晔,许小可. 融媒体环境下的受众计算: 途径与挑战[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2021, 28(01): 64-70.
- [17] Xie N. A summary of grey forecasting models [J]. Grey Systems: Theory and Application, 2022, 12(4): 703-722.
- [18] Deng J. Control problems of grey systems [J]. Systems and Control Letters, 1982, 1(5): 288-294.
- [19] Liu S, Tao Y, Xie N, et al. Advance in grey system theory and applications in science and engineering [J]. Grey Systems: Theory and Application, 2022, 12(4): 804-823.
- [20] Xie N, Wang R. A historic review of grey forecasting models [J]. The Journal of Grey System, 2017, (4).
- [21] 邓聚龙. 灰色控制系统(第2版)[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1993.
- [22] 李耘涛,刘妍,刘毅. 网络舆情灰色预警评价研究[J]. 情报杂志, 2011, 30(04): 24-27+23.
- [23] 潘崇霞. 基于灰色理论的网络舆情危机预警研究[D]. 南昌: 江西财经大学, 2012.
- [24] 李文杰,化存才,何伟全,等. 网络舆情事件的灰色预测模型及案例分析[J]. 情报科学, 2013, 31(12): 51-56.
- [25] 张和平,陈齐海. 基于灰色马尔可夫模型的网络舆情预测研究[J]. 情报科学, 2018, 36(01): 75-79.

- [26] 史蕊, 陈福集, 张金华. 基于组合灰色模型的网络舆情预测研究[J]. 情报杂志, 2018, 37(07): 101-106.
- [27] 陈培友, 侯甜甜. 基于ANP-灰色模糊的社交网络舆情风险预警研究-以“重庆公交坠江事件”为例[J]. 情报科学, 2019, 37(05): 115-120.
- [28] 崔舒为. 改进的灰色混合模型及其在网络舆情预测上的应用[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2020.
- [29] 滕婕, 夏志杰, 罗梦莹. 基于新陈代谢 GM(1,N)马尔科夫模型的动态网络舆情危机预测[J]. 情报科学, 2020, 38(08): 88-94.
- [30] 粟琪. 数据特征驱动下网络舆情热度灰色预测研究[D]. 南京: 南京信息工程大学, 2023.
- [31] Yan S, Su Q, Gong Z, et al. Fractional order time-delay multivariable discrete grey model for short-term online public opinion prediction [J]. Expert Systems with Applications, 2022, 197: 116691.
- [32] Su Q, Yan S, Wu L, et al. Online public opinion prediction based on a novel seasonal grey decomposition and ensemble model [J]. Expert Systems With Applications, 2022, 210: 1183341.
- [33] Yan S, Su Q, Gong Z, et al. Online public opinion prediction based on rolling fractional grey model with new information priority [J]. Information Fusion, 2023, 91: 277-298.
- [34] Yan S, Su Q, Wu L, et al. A damping grey multivariable model and its application in online public opinion prediction [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 118(C): 105661.
- [35] 刘思峰, 杨英杰, 吴利丰, 等. 灰色系统理论及应用(第7版)[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [36] Wu L, Liu S, Yao L, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.
- [37] Wu L. Using fractional GM(1,1) model to predict the life of complex equipment[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2016, 6(1): 32-40.
- [38] Wu L, Liu S, Yao L, et al. Using fractional order accumulation to reduce errors from inverse accumulated generating operator of grey model [J]. Soft Computing, 2015, 19: 483 - 488.
- [39] Wu L, Liu S, Fang Z, et al. Properties of the GM(1,1) with fractional order accumulation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 252: 287-293.
- [40] Mao S, Gao M, Xiao X, et al. A novel fractional grey system model and its application [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(7-8): 5063-5076.
- [41] 孟伟, 曾波. 分数阶算子与灰色预测模型研究[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [42] 孟伟, 曾波. 基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1903-1907.
- [43] Zeng B, Yu L, Liu S, et al. Unification of grey accumulation operator and the inverse operator and its application [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2021, 41(10): 2710-2720.
- [44] 吴正鹏, 刘永菲. 复数阶累加运算及其在广义复GM(1,1)中的应用[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2016, 23(01): 6-11.
- [45] Wu Z, Chen J, Chai J, et al. Grey system model with complex order accumulation [J]. The Journal of Grey System, 2021, 33(1): 98-117.
- [46] 吴正鹏, 陈见柯, 柴剑平. 复数阶累加的灰色系统模型[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2021, 28(06): 39-46.
- [47] 陈超英. 累加生成的改进和 GM(1,1,t) 灰色模型[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(02): 105-109.
- [48] Wei B, Xie N, Yang L. Understanding cumulative sum operator in grey prediction model with integral matching [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 82: 105076.
- [49] Lin C, Song Z, Liu S, et al. Study on mechanism and filter efficacy of AGO/IAGO in the frequency domain [J]. Grey Systems: Theory and Application, 2021, 11(1): 1-21.
- [50] 姚天任, 江太辉. 数字信号处理(第三版) [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2023.
- [51] 冷建华. 傅里叶变化[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [52] 陈涛. 累加卷积变换及其在灰色预测模型中的应用[J]. 中国传媒大学学报(自然科学版), 2023, 30(02): 76-84.
- [53] 罗泰晔. 基于 Logistic 模型的微博舆情热点发展预测研究[J]. 统计与信息论坛, 2017, 32(10): 91-95.

编辑:王谦