

引用格式:谭莹莹,李运寒,周雅丽.正则图研究热点与周期演变的知识图谱分析[J].中国传媒大学学报(自然科学版),2023,30(06):50-55.
文章编号:1673-4793(2023)06-0050-06

正则图研究热点与周期演变的知识图谱分析

谭莹莹^{1,2*},李运寒¹,周雅丽¹

(1.安徽建筑大学数理学院,合肥 230601;2.安徽建筑大学运筹学与数据科学实验室,合肥 2300601)

摘要:从Web of Science核心合集获取正则图研究全部期刊的文献数据,借助科学知识图谱绘制正则图研究2008-2022年的全时段高频关键词共现图谱,以及分时段高频关键词共现图谱(以每三年为一个时段)。通过比较全时段和分时段高频关键词的周期演变,识别正则图的整体研究概况与热点,以及各周期的研究热点及变化规律。结果显示:(1)正则图2008-2022年的四大研究热点为:正则图的参数与相关性质、正则图的特殊图类、正则图的应用、正则图的代数刻画;(2)在正则图的热点研究主题中,强正则图、距离正则图、复杂网络与算法等各周期稳定且变化极少;(3)从2011年开始,正则图热点主题数量显著增多,出现了线性码、深度学习、机器学习等研究主题。

关键词:正则图;研究热点;知识图谱;VOSviewer

中图分类号:C812 **文献标识码:**A

Knowledge graph analysis of research hotspots and periodic evolution of regular graphs

TAN Yingying^{1,2*}, LI Yunhan¹, ZHOU Yali¹

(1.School of Mathematics and Physics, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China;

2. Laboratory of Operations Research and Data Science, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China)

Abstract: In this paper, the literature data of all journals in the field of regular graphs were obtained from the core collection of Web of Science, and the full-time high-frequency keyword co-occurrence maps and the time-divided high-frequency keyword co-occurrence maps in this field from 2008 to 2022 were drawn with the help of the mapping knowledge domains (every three years as a time period). By comparing the periodic evolution of high-frequency keywords in all periods and in different periods, the overall research situation and hot spots of regular graphs, as well as the research hot spots and changing rules in each period, were identified. The results show that: (1) The four research hotspots of regular graphs from 2008 to 2022 are parameters and related properties, special graph classes, applications and algebraic characterizations; (2) In the hot topics, research on strongly regular graphs, distance-regular graphs, complex networks and algorithms are stable in each period and rarely change; (3) Since 2011, the number of hot topics in the field of regular graphs have increased significantly, and topics such as linear coding, deep learning and machine learning have emerged.

Keywords: regular graphs; research hotspot; mapping knowledge domains; VOSviewer

基金项目:国家自然科学基金项目(12371339,11801007);安徽省运筹控制与组合优化创新团队(2023AH010020);安徽高校省级自然科学研究重点项目(2023AH050194);安徽省教育厅2022年度新时代育人质量工程项目(2022xxsfkc031)

作者简介(*为通讯作者):谭莹莹(1979-),女,博士,教授,主要从事图论研究。Email: tansusan1@ahjzu.edu.cn;李运寒(1998-),男,硕士研究生,主要从事图论研究。Email: liyunhan1998@163.com;

1 引言

图论起源于18世纪的哥尼斯堡七桥问题。自诞生至今已将近300年,图论的研究从萌芽阶段,逐渐发展成为数学的一个重要分支。尤其近年随着技术的进步,图方法在人工智能领域得到广泛应用,图论的研究越来越成为学者们讨论的热点,而正则图是一类比较特殊的图,图的许多性质都是从正则图的研究开始的,如正则图的连通性、正则图的矩阵表示、正则图的因子理论、正则图的构造与计数、正则图的着色等^[1],同时正则图又具有很强的对称性,有着许多其他图没有的优美性质,因此研究正则图的性质及其应用一直是一个很活跃的课题。

Web of Science 核心合集在2008-2022年共发表了6943篇与正则图有关的论文,目前暂未见到有文献对正则图领域的研究内容及热点进行分类统计。本文使用科学知识图谱,借助VOSviewer,对这6943篇论文的关键词共现图谱及其周期演变进行了统计分析及可视化处理,可以准确展现正则图的研究概况、研究热点及其发展趋势。

2 数据与方法

2.1 数据来源

本文以科学引文数据库 Web of Science 核心合集为数据源,基本检索条件1设置为:“主题 = regular graph; 文献类型=Article, Review; 语种=English; 自定义年份:2008-01-01 到 2022-12-31”;基本检索条件2设置为:“主题 = regular graphs”,其余检索条件同条件1。条件1与条件2共检索到6943篇文献。

2.2 研究方法

VOSviewer是通过“网络数据”(主要是文献知识单元)的关系构建和可视化文献计量网络的软件,可以构建高频词及关键词共现图谱、关键词聚类图谱等,实现科学知识图谱的绘制,展现知识领域的结构、进化、合作等关系,其突出特点是图形展示能力强,适用于大规模数据的可视化分析。

本文以 Web of Science 核心合集2008-2022年发表的6943篇文献为分析对象,对其进行合并、筛选后,借助VOSviewer可视化分析工具,通过词频分析和共现分析等方法绘制高频关键词共现图谱,总结归纳正则图2008-2022年的整体研究热点。

此外,为探索正则图研究不同时间周期的研究热点及周期演变规律,将样本文献以三年为一个周期,划分为五个时间段:2008-2010年、2011-2013年、2014-2016年、2017-2019年、2020-2022年。在此基础上,分别绘制周期性文献高频关键词的共现图谱,全方位展示正则图不同时期研究热点的演变规律及差异,并揭示正则图研究的前沿热点。

3 2008-2022年正则图研究热点

Web of Science 核心合集在2008-2022年所发表的与正则图有关的文献共包含1283个高频关键词。在VOSviewer软件中将关键词出现的最小频次设置为10,则某一关键词在出现频次大于或等于10时才会显示,最终显现了图1所示的495个节点,每个节点代表一个关键词,节点形状大小与关键词出现的频次呈正相关,即关键词节点与字体越大,该关键词出现频率越高,关键词之间的连线及其粗细表示关键词之间的共现关系及共现频次,关键词共现图谱不同区域颜色的差异表示不同主题的关键词聚类。

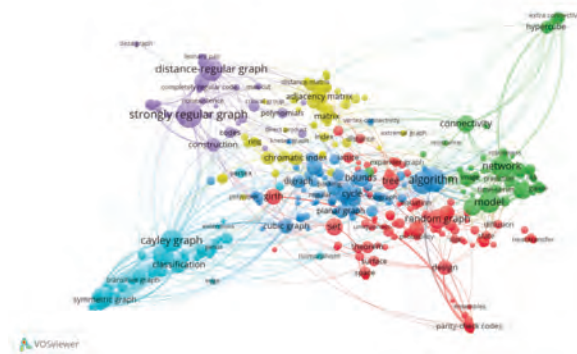


图1 高频关键词聚类图谱

由于文献数据取自外文期刊,所以增加表1中英文关键词对照,图1和表1的统计数据显示,正则图2008-2022年的研究热点主要聚焦于以下几大类:

(1)正则图相关参数与性质研究。研究正则图相关参数与性质的热点问题涵盖:自同构群、Wiener指数、Kirchhoff指数、连通度、匹配数等。文献[2]考虑了正则图的迭代线图 and 迭代团插入图的生成树的数目和Kirchhoff指数的渐近行为。文献[3]确定线性的Wiener指数,并根据图的Laplace特征值得到块-团图的Wiener指数的封闭形式。文献[4]研究了正则双轨道图的边连通度。后来,文献[5]刻画了最优3-正则双轨道图,并给出了k-正则双轨道图是最优的充分条件,而

表1 正则图2008-2022年研究热点类别、关键词及中英文对照

类别	关键词(出现频次)	中英对照
正则图相关参数研究	automorphism(187)	自同构群
	connectivity(125)	连通度
	bounds(112)	界
	girth(108)	围长
	chromatic index(87)	色指标
	matching(79)	匹配
	diameter(74)	直径
	independent set(71)	独立集
	colorings(56)	染色数
	clique(50)	团
正则图的特殊类研究	stability(45)	稳定性
	Wiener index(40)	Wiener指数
	Kirchhoff index(32)	Kirchhoff指数
	localization(27)	局部化
	strongly regular graph(311)	强正则图
	distance-regular graph(242)	距离正则图
	Cayley graph(218)	Cayley图
	bipartite graph(105)	二部图
	symmetric graph(72)	对称图
	complete graph(62)	完全图
正则图应用研究方向	hypergraph(44)	超图
	arc-transitive graph(43)	弧传递图
	extremal graph(16)	极图
	algorithm(253)	算法
	complex network(220)	复杂网络
	random graph(162)	随机图
	design(92)	设计
	hypercube(64)	超立方
	interconnection network(59)	互连网络
	linear code(51)	线性码
正则图的代数刻画	small-world network(45)	无标度网络
	completely regular code(28)	完全正则码
	social network(21)	社交网络
	deep learning(20)	深度学习
	machine learning(18)	机器学习
	network topology(16)	网络拓扑结构
	polynomial(64)	多项式
	subconstituent algebra(37)	次成分代数
	Terwilliger algebra(36)	Terwilliger代数
	algebraic connectivity(23)	代数连通度

文献[6]刻画了围长至少为6的超限制边连通k-正则双圈图。

(2)正则图的特殊图类研究。国内外图论学者关注强正则图、距离正则图、Cayley图、传递图等特殊图类的研究。其中文献[7]研究了一类特殊的广义强正则图,得到了它的特征值的参数和两个不等式之间的关系,并且分别基于Cayley图、图运算和结合方案给出了广义强正则图的一些构造。文献[8]考虑了距离正则图的距离-2图是强正则图。文献[9]讨论了直径为2,3,4的距离正则图的伪点传递性。文献[10]对每个局部图最多有一个第二大特征值的2-部分距离正则图进行了分类。

(3)正则图应用研究方向。自然连通度可以用来有效地表征复杂网络的鲁棒性。自然连通度通过

评估所有长度的封闭行走的加权数量来量化网络中备选路线的冗余,并且可以被视为从图谱中获得的平均特征值。文献[11]从解析和数值两个方面探索了正则环格和正则随机图的自然连通度,用广义Bessel函数重新表述了正则环格的自然连通度,并证明了正则环格的自然连通度与网络大小无关。文献[12]给出了最优正则图设计和最优扩展正则图设计的精确计算机搜索结果。此外,文献[13]指出正则图在并行和分布式系统的架构中具有潜在的应用。

(4)正则图的代数刻画。文献[14]给出了任意距离正则图的Hosoya多项式的一个显式公式。文献[15]证明了有较小度的 Δ -正则图的Alliance多项式族是一个非常特殊的族,因为它不包含非 Δ -正则图的Alliance多项式。文献[16]证明了一个图是否由其广义特征多项式决定等价于是否由一个定义良好的双正则图决定,并提出了一个统一的方法来表明一些新的双正则图族可由其广义特征多项式来刻画。文献[17-19]从群表示论的角度刻画了Johnson图和树的Terwilliger代数。

4 正则图研究热点的周期演变

2008-2022年的共现聚类图谱能够反映出正则图的总体研究热点,却无法反映不同时期的正则图研究情况,对这一问题的探究是识别正则图研究前沿主题的关键。本文将Web of Science核心合集2008-2022年发表的文献,按每三年为一个时间段分成五个阶段,基于VOSviewer工具绘制出各时期的高频关键词共现聚类图谱,同时基于该图谱识别出每个时期的研究热点。

(1)2008-2010年研究热点

2008-2010年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱如图2所示。

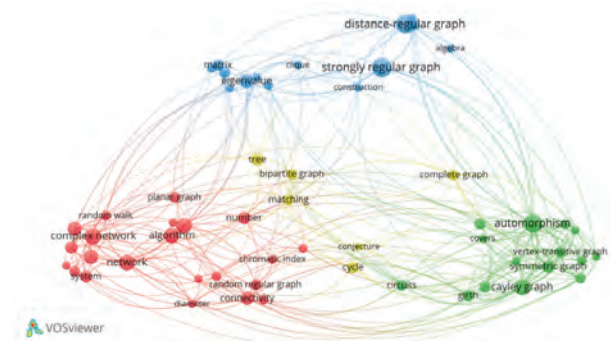


图2 2008-2010年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱

结合图2可知,正则图2008-2010年的文献共有以下热点主题:强正则图、距离正则图、自同构、Cayley图、算法、网络、匹配数、连通度等研究主题。文献[20]研究了循环正则图的一个子类 $[3,1,6]$ -循环正则图,得到了由超立方体的两个中间层诱导的子图的一个特征。文献[21]证明了 Γ 有一个与Hamming图或对偶极图同构的直径为 $d-1$ 的强闭子图,并给出了覆盖半径为 $d-2$ 的情形下的代数特征。图2中节点数量较少且偏小,说明2008-2010年正则图并非当时图论领域研究重点。

(2)2011-2013年研究热点

如图3所示,共现聚类图谱与2008-2010年情况类似,但有少数新的研究方法和主题出现。2011-2013年的新增热点聚类主题包括:Hamilton图、cubic图、设计、色指标、线图研究热点。文献[22]确定了连通的 k -正则图不是Hamilton图的顶点的最小数目,并且解决了对于Hamilton路径的一个类似问题。文献[2]考虑了一个正则图的生成树数目的渐近行为以及迭代线图和团插入图的Kirchhoff指数,还证明了有些指数的渐近行为与正则图的结构无关。从2011年开始,图中节点数量显著增多,表明正则图研究正处于发展阶段。

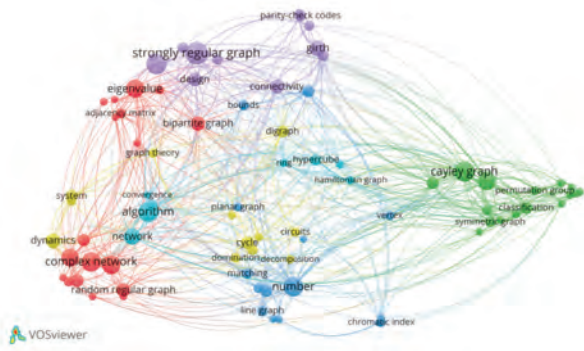


图3 2011-2013年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱

(3)2014-2016年研究热点

如图4所示,与2008-2010年和2011-2013年热点主题相比,2014-2016年正则图的研究热点的聚类结构更加清晰,热点主题更丰富,与以往类似的有强正则图、结合方案、复杂网络、匹配数等。新增热点有阿贝尔群、完全图、完全正则码、有向图、超图、多项式、量子行走等。文献[23]利用Conder-Ma方法研究了4价对称图的对称覆盖。文献[24]构造了一个新的具有参数 $(108,10,3,0,1)$ 的混合Moore图,以及具有参数

$(36,10,5,2,3)$ 和 $(96,13,5,0,2)$ 的新的有向强正则图。2014-2016年尽管新增了部分热点主题,但强正则图、距离正则图等依旧为研究热点。

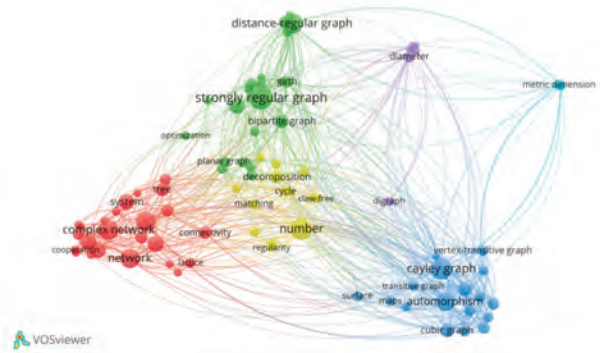


图4 2014-2016年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱

(4)2017-2019年研究热点

由图5可知,2017-2019年正则图高频关键词的聚类情况与2014-2016年类似,形成距离正则图、算法与复杂网络、Caley图、生成树、立方图、设计、对称图等稳定的热点主题类别。此外,2017-2019年频次高于10的关键词数量呈现明显的年度增长趋势,新增了密度、边连通度、熵、超立方体、Kirchhoff指数、线性码、完美匹配数、生成树、谱半径、Terwilliger代数、时间序列等热点。文献[7]研究了二阶广义强正则图,给出了这些图的特征值的两个不等式和图的参数之间的关系,并且分别基于Cayley图、图运算和结合方案给出了广义强正则图的一些构造。文献[25]确定了完全正则团图的结构,证明了除Doob图、扭Grassmann图和Hermitean型图以外,所有的距离正则图都是完全正则团图。



图5 2017-2019年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱

(5)2020-2022年研究热点

结合图6可知,2020-2022年的高频热点主题数量和覆盖范围达到快速发展阶段。期间展现出的研究

热点除了强正则图与距离正则图、复杂网络、完全图、匹配数、Caley图等稳定出现的主题之外,新增了深度学习、边染色、特征提取、机器学习、量子、无符号 Laplace 谱半径等研究热点。文献[26]证明了除了一种边着色,任何其他的边着色都可以通过有限次 Kempe 边切换获得。文献[27]给出了发现稠密正则图中长圈的多项式时间算法,该算法结合了极值图论和谱划分的一些工具。总体来说,2020-2022 年研究热点主题可以归纳为以下几个方面:①正则图的应用研究:涵盖复杂网络、时间序列、连通度等。②正则图的特殊图类研究:包括 Caley 图、强正则图、距离正则图、Hamilton 图、随机正则图等。③正则图相关参数与性质的研究:涵盖自同构群、周长、匹配数、色度指数等。

(6) 研究热点周期演变比较

不同周期的高频关键词及其聚类能够反映出各

时期的研究热点主题。表 2 展示了 2008-2010 年、2011-2013 年、2014-2016 年、2017-2019 年和 2020-2022 年五个时间周期数量阈值大于等于 10 的研究热点关键词及其出现频次。

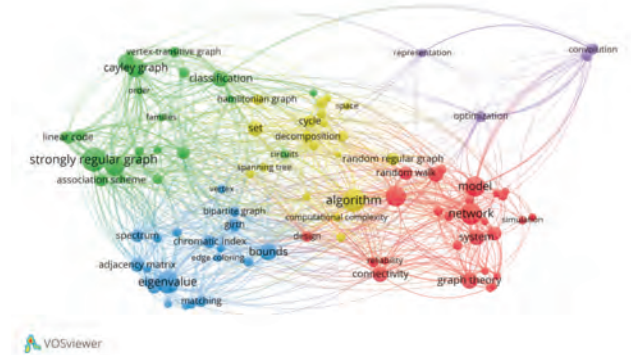


图 6 2020-2022 年正则图相关文献高频关键词的共现聚类图谱

表 2 不同周期的研究热点关键词及其出现频次

2008-2010 关键词	频次	2011-2013 关键词	频次	2014-2016 关键词	频次	2017-2019 关键词	频次	2020-2022 关键词	频次
		强正则图	56	强正则图	70	强正则图	80	强正则图	75
		距离正则图	45	距离正则图	50	距离正则图	66	距离正则图	52
强正则图	30	自同构群	38	自同构群	47	自同构群	39	自同构群	38
距离正则图	29	复杂网络	42	复杂网络	50	复杂网络	51	复杂网络	55
自同构群	28	算法	45	算法	47	算法	70	算法	71
复杂网络	22	Caley 图	43	Caley 图	56	Caley 图	49	Caley 图	49
算法	20	特征值	37	随机图	36	熵	14	结合方案	25
Caley 图	21	结合方案	15	匹配数	28	完美匹配数	15	平面图	18
特征值	17	连图	18	结合方案	22	边连通度	12	熵	15
连图	11	设计	23	阿贝尔群	10	Kirchhoff 指数	11	随机正则图	25
结合方案	11	匹配数	16	完全图	12	密度	10	色指标	25
匹配数	11	线图	15	有向图	10	超立方体	13	团	12
		立方图	15	超图	13	线性码	16	深度学习	15
		Hamilton 图	14	图多项式	15	生成树	13	边染色	12
		色指标	12	量子行走	10	谱半径	12	特征提取	14
						Terwilliger 代数	11	机器学习	14
								量子	15

从表 2 可看出,从 2008-2010 年到 2020-2022 年,不同周期频次大于等于 10 的研究热点数量呈逐年增长趋势,研究热点的覆盖范围更为广泛。随着时间的变迁,正则图的热点主题不断涌现。2008-2010 年和 2011-2013 年的正则图研究热点相对较少,属于正则图研究发展初期。2011 年开始,研究热点主题显著增多,各研究方法和热点主题繁荣发展。2008-2010 年的热点关键词数量少于 12 个,而其余四个周期内频次大于等于 10 的热点关键词数量都超过了 15 个。强正则图、距离正则图、复杂网络与算法、Caley 图、结合方案是不同时期图论领域学者持续关注的热点主题。其中,强正则图与距离正则图、复杂网络与算法研究主题的关注程度随周期变化呈增长趋势。

5 结语

正则图发展至今,尽管涌现出大批高质量研究文献,但其在应用方面的文献仍较少,目前 Web of Science 在 2008-2022 年仅有两千余篇论文。本文通过绘制该期间正则图高频关键词共现聚类图谱以及各年代高频关键词共现聚类图谱,可视化分析该领域的研究热点、前沿主题及其周期演变。结果发现,正则图 2008-2022 年的研究热点主题可分为四大主题:正则图的参数与相关性质、正则图的特殊图类、正则图的应用、正则图的代数刻画。

通过比较 2008-2022 年正则图研究热点主题的周期变化,发现 2008-2010 和 2011-2013 年正则图的研究

热点数量和覆盖范围较少,正则图尚未出现与其他学科进行交叉研究的局面。从2011年开始,正则图研究热点主题显著增多,其中强正则图、距离正则图、复杂网络与算法等是正则图各周期稳定且变化极少的研究热点。近年来,关于正则图的研究也开始聚焦于线性码、深度学习、机器学习等领域。

参考文献(References):

- [1] 石阳阳. 某些特殊图与正则图的路覆盖数[D]. 成都: 电子科技大学, 2016.
- [2] Yan W, Yeh Y N, Zhang F. The asymptotic behavior of some indices of iterated line graphs of regular graphs[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2012, 160 (7-8):1232-1239.
- [3] Zhou J X. Tetravalent s-transitive graphs of order $4p$ [J]. *Discrete Mathematics*, 2009, 309(20):6081-6086.
- [4] Liu F, Meng J. Edge-connectivity of regular graphs with two orbits[J]. *Discrete Mathematics*, 2008, 308(16): 3711 - 3716.
- [5] Lin H, Yang W, Meng J. λ' -optimal regular graphs with two orbits[J]. *Ars Combinatoria*, 2015, 121:175-185.
- [6] Lin H, Meng J, Yang W. Super restricted edge connectivity of regular graphs with two orbits[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(12): 6656-6660.
- [7] Jia D, Yuan L, Zhang G. On generalized strongly regular graphs[J]. *Graphs and Combinatorics*, 2018, 34(4): 555-570.
- [8] Iqbal Q, Koolen J H, Park J, et al. Distance-regular graphs with diameter 3 and eigenvalue $a_2 - c_3$ [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2020, 587:271-290.
- [9] Koolen J H, Lee J H, Tan Y Y. Remarks on pseudo-vertex-transitive graphs with small diameter[J]. *Discrete Mathematics*, 2022, 345(10):112990.
- [10] Zhang Y, Liang X, Koolen J H. The 2-partially distance-regular graphs such that their second largest local eigenvalues are at most one [J]. *Discrete Mathematics*, 2022, 345(3):112749.
- [11] Wu J, Barahona M, Tan Y J, et al. Robustness of regular ring lattices based on natural connectivity[J]. *International Journal of Systems Science*, 2011, 42(7): 1085-1092.
- [12] Cakiroglu S A. Optimal regular graph designs[J]. *Statistics and Computing*, 2018, 28:103-112.
- [13] Cheng X, Cao X, Qian L. Constructing few-weight linear codes and strongly regular graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2022, 345(12):113101.
- [14] Deutsch E, Rodríguez-Velázquez J A. The Hosoya polynomial of distance-regular graphs[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2014, 178:153-156.
- [15] Carballosa W, Rodríguez J M, Sigarreta J M, et al. Alliance polynomial of regular graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, 225:22-32.
- [16] Wang W, Mao L, Lu H. On bi-regular graphs determined by their generalized characteristic polynomials [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, 438(7):3076-3084.
- [17] Tan Y, Fan Y Z, Ito T, et al. The Terwilliger algebra of the Johnson scheme $J(N, D)$ revisited from the viewpoint of group representations[J]. *European Journal of Combinatorics*, 2019, 80: 157-171.
- [18] Li S D, Fan Y Z, Ito T, et al. The isomorphism problem of trees from the viewpoint of Terwilliger algebras[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2021, 177: 105328.
- [19] Xu J, Ito T, Li S D. Irreducible representations of the Terwilliger Algebra of a tree[J]. *Graph and Combinatorics*, 2021, 37: 1749-1773.
- [20] Kahoul N, Berrachedi A. Cycle-regular graphs of $(0, \lambda)$ -graph type[J]. *Discrete Mathematics*, 2010, 310(2):255-259.
- [21] Suzuki H. Parallelogram-free distance-regular graphs having completely regular strongly regular subgraphs[J]. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2009, 30(3):401-413.
- [22] Cranston D W, Suil O. Hamiltonicity in connected regular graphs [J]. *Information Processing Letters*, 2013, 113 (22-24): 858-860.
- [23] Ma J. Arc-transitive abelian regular covering graphs [J]. *International Journal of Algebra and Computation*, 2016, 26(07):1369-1393.
- [24] Jorgensen L K. New mixed Moore graphs and directed strongly regular graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 2015, 338(6): 1011-1016.
- [25] Suzuki H. Distance-regular graphs of large diameter that are completely regular clique graphs [J]. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2018, 48(3):369-404.
- [26] Lazarovich N, Levit A. Edge Kempe equivalence of regular graph covers[J]. *Journal of Graph Theory*, 2020:93(4): 553-559.
- [27] Patel V, Stroh F. A polynomial-time algorithm to determine (almost) Hamiltonicity of dense regular graphs[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2022, 36(2): 1363-1393.

编辑:赵志军