引用格式:陈涛.累加卷积变换及其在灰色预测模型中的应用[J].中国传媒大学学报(自然科学版),2023,30(02):76-84.
文章编号:1673-4793(2023)02-0076-09

累加卷积变换及其在灰色预测模型中的应用

陈涛
(中国传媒大学 数据科学与智能媒体学院,北京100024)

摘要:基于数据序列卷积运算提出了一种构建累加生成算子的新途径。通过构造一种累加生成卷积序列来实现数据序列的累加生成。然后引入单边Z变换,得到累加生成卷积序列在频率域的形式,从而得到累加生成算子在频率域的表达式。对于逆累加生成算子,构造了相应的逆累加生成卷积序列,并导出它在频率域的表达式。通过构造累加生成卷积序列和单边Z变换得到其频率域的表达式,获得两个全新的视角来理解累加生成算子和逆累加生成算子之间的互逆关系。最后通过实际案例验证了理论的正确性和方法的有效性。

关键词:灰色系统理论;灰色预测模型;微分方程;参数估计;Z变换
中图分类号:N941.5 **文献标识码**:A

The accumulative convolution transform and its application in grey forecasting model

CHEN Tao
(Communication University of China, Beijing 100024, China)

Abstract: Based on the convolution methods, this paper propose a new method to construct the accumulative generation operator. A data sequence called accumulative generation convolution sequence is constructed, which play the same role as accumulative generation operator. Through the single side Z-transform, the accumulative convolution sequence in the complex field is obtained, which is the expression of the accumulative generation operator in the frequency domain. The similar results of the inverse accumulative generation operator are also developed. Finally, we obtain two new points of view to interpret the mutually inversion relationships between the accumulating operator and the inverse accumulating generation operator. Finally, some real cases are demonstrated to verify the accuracy of the theoretical results and the effectiveness of the method.

Keywords: grey system theory; grey forecasting model; differential equation; parameter estimation; Z-transform

1 引言

系统分析和预测的主要目标是通过分析观测到的系统行为数据,建立数学模型。一旦确定了数学模型,则可以运用相应的数学理论分析工具和数值计算方法探究模型的性质,从而描述系统的变化规律,预测系统发展趋势。在一些发展成熟的学科,比如物理学,描述系统变化规律的数学模型是基于已经被透彻理解的物理机制而建立的,模型中的参数可以通过第一性原理求解或者直接测量得到[1]。然而,在当前很

基金项目:中国传媒大学中央高校基本科研业务费专项资金(CUC220B005)
作者简介:陈涛(1986-),男,博士,副教授,主要从事不确定性数学的计算方法研究。Email:chentao@cuc.edu.cn

多学科中的系统问题中，比如社会系统，经济系统和传播系统等，系统运行的机制和传播规律并没有被人们所充分理解，此时建立的数学模型中含有的未知参数并不能通过第一性原理或测量得到。因此，需要从观测数据中估计出数学模型中的未知参数。

微分方程是一类广泛用于描述系统变量随时间变化的数学模型，被广泛应用于很多学科。考虑采用微分方程描述系统的变化规律：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t,\alpha) \tag{1}$$

其中x是系统变量，一般观察系统变量随时间的变化，因此自变量是时间变量t。符号α代表一个参数集，表示模型中的待定参数。灰色系统理论[1]创始人邓聚龙教授（1982）指出，社会系统，经济系统等均可视为广义的能量系统，而能量的积累和释放一般遵循指数规律[9]。指数函数在微分算子的作用下是关于自身的线性函数，即设$f = ax + b$，则可以得到最基本的灰色预测GM（1,1）模型[4]：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + b \tag{2}$$

该模型的参数集$\alpha = \{a,b\}$含有两个待定参数。希望通过系统的观测数据，来估计模型的未知参数a和b。使用传统的统计方法比如极大似然估计[5]，贝叶斯方法[6]，或者现代的神经网络[7]，机器学习方法[8]做模型的参数估计时，都需要大量的样本数据。和这些方法不同，灰色系统理论主要是分析和求解由于信息不完全和不准确而导致的不确定性问题，其最显著的特征是小样本数据建模[9]。灰色系统理论的一个基本准则是充分开发和利用现有的数据，从而发现更多隐藏在数据背后的系统规律[10]。

当今的移动互联网上每天产生海量的数据。我们可以获得数目巨大的样本，但是用于建模的观测变量却很少，因为系统通常只记录了样本在什么时间，什么位置，做了什么事。并且这些数据也只是记录了用户的行为，而至于用户为什么这么做？动机在哪？这些变量很难测量[11]。由于缺乏这方面的建模数据，导致部分信息明确，而部分信息不明确，属于灰色系统[9]。此外，获得的观测数据存在误差[11]，尤其是生成式智能机器人的出现，导致互联网上大量的非人为信息出现，并非真实体现人类样本的行为。这些问题给建模带来了很大的困难。

邓聚龙教授(1984)提出了累加生成算子(AGO)[3][4]，它是一种作用在数据序列的算子，有两个目的：首先，它为建模提供中间数据；其次，它将原有随机序列的随机性加以弱化。对于非负数据序列，通过适当的累加生成后，得到的累加序列已由随机变为非随机，服从指数法则，可以通过微分方程模型进行拟合。累加生成算子已经成为很多灰色模型的建模的必要过程[12]。

累加生成算子可以连续多次作用于数据序列，自然产生高阶累加生成算子的概念，比如累加生成算子连续作用m次相当于m阶累加生成算子，即m-AGO，$m \in \mathbb{N}$自然数集。在很多灰色模型中，累加生成算子的阶数是一个很重要的参数。关于累加生成算子的阶数已有大量的研究。吴利丰等(2015)提出了$\frac{p}{q}$分数阶累加生成算子$\frac{p}{q}$-AGO，其中$p,q \in \mathbb{Z}^+$正整数集[13][14]。本质上分数$\frac{p}{q}$属于有理数。曾波和孟伟等(2016)将累加生成算子的阶数推广到任意实数阶，即r-AGO，$r \in \mathbb{R}$实数集[15][16]。吴正鹏等(2016)将累加生成算子的阶数推广到频率域，即z-AGO，$z \in \mathbb{C}$复数集，这是累加生成算子阶数最一般的结果，因为复数域是目前已知的最广的数域[17][18][19]。以上提到的工作都有一个共同特点，它们都是通过代数求和的方式构造累加生成算子。最近有一些工作是从新的途径研究累加算子，肖新平和毛树华(2016)发展了以矩阵形式表示累加生成算子[20]。韦保磊和谢乃明等(2020)引入积分匹配法解释累加生成算子的机制[21]。林长海等(2021)引入信号处理领域的频谱分析方法研究累加生成算子在频率域中的形式[22]。本文的主要工作是，采用数据序列的卷积运算构造累加生成算子相应的卷积序列，从而通过数据序列的卷积运算实现累加生成。

本文结构：第2部分主要介绍数据序列卷积运算的定义并通过卷积定义累加生成，引入单边Z变换将累加生成卷积序列变换到频率域上。第3部分，基于卷积定义逆累加生成算子。第4部分，从三种视角，算子的角度、卷积序列的角度和频率域的角度，讨论累加生成算子和逆累加生成算子的互逆关系。第5部分通过实际案例验证理论的正确性和方法的有效性。

2 基于卷积定义累加生成算子

本节引进数据序列的卷积运算来定义累加生成算子。采用小写字母“ago”表示累加生成算子和累加生成卷积序列。传统的累加生成算子的定义如下：

定义 2.1 设$\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$为长度为N的数据序列，那么累加生成算子定义如下：

$$y[n] = ago(x[n]) = \sum_{k=0}^{n} x[k] \tag{3}$$

设 $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 表示长度为 N 的数据序列，$n=0,1,2,\cdots,N-1$，则 $x[n]$ 表示数据序列中的某个元素。

下面，引入数据序列的卷积运算，然后通过卷积重新定义累加生成算子。

定义 2.2 设 $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 和 $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 为长度为 N 的数据序列，则它们的卷积定义如下：

$$x[n]*y[n]=\sum_{k=0}^{n}x\cdot y[n-k] \tag{4}$$

定义 2.3 单位脉冲序列 $\{\delta[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 如下：

$$\delta[n]=\begin{cases}1, n=0,\\ 0, n\neq 0.\end{cases} \tag{5}$$

引理 2.1 设 $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 是长度为 N 的数据序列，且 $\{\delta[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 是单位脉冲序列，则：

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]*\delta[n-k]=x[n] \tag{6}$$

引理2.1表明单位脉冲序列对于任何序列具有卷积不变性，从而它在卷积运算中，扮演着单位元素的角色，即可以认为 $\delta[n]=I[n]$。如果序列 $\{I[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 和其它数据序列做卷积不会改变数据序列的结果，那么 $\{I[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 称为卷积单位元素，即 $x[n]*I[n]=I[n]*x[n]=x[n]$。

通过以上定义，给出关于累加生成算子在卷积运算中的具体形式，即找到一个序列，任何其他序列和它做卷积，相当于做了累加的结果。

定理 2.1 设 $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 是长度为 N 的数据序列，$\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 是由公式定义的累加生成序列，那么累加生成算子 $ago()$ 可以重新表示为卷积的形式：

$$y[n]=x[n]*ago[n] \tag{7}$$

其中 $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 称为累加生成算子 $ago()$ 相应的卷积序列(单位脉冲响应函数)，并且它的具体形式可以表示为单位脉冲序列的级数：

$$ago[n]=\sum_{k=0}^{n}\delta[n-k] \tag{8}$$

证明：由定义2.2，可得：

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]\cdot\delta[n-k]=x[n]$$

$$x[n]*\delta[n-1]=\sum_{k=0}^{n}x[k]\cdot\delta[(n-1)-k]=x[n-1]$$

……

$$x[n]*\delta[n-n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]\cdot\delta\big[(n-n)-k\big]=x[0]$$

所以

$$\begin{aligned}&x[n]*(\delta[n]+\delta[n-1]+\cdots+\delta[0])\\&=x[n]+x[n-1]+\cdots+x[0]\\&=\sum_{k=0}^{n}x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}x[k]=y[n]\end{aligned}$$

对比(7)式，则得结论(8)。

评注：累加生成卷积序列 $\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 正是单位阶跃序列 $\{u[n]\}_{n=0}^{N-1}=\{1,1,\cdots,1\}$，即：

$$ago[n]=u[n]=1, n\geqslant 0 \tag{9}$$

定义 1.4 同一序列多次重复卷积称为卷积幂：

$$\begin{aligned}&x^{0*}[n]=\delta[n],\\&x^{1*}[n]=x[n],\\&x^{2*}[n]=x[n]*x[n],\\&\vdots\\&x^{k*}[n]=\underbrace{x[n]*x[n]*\cdots*x[n]}_{k}.\end{aligned} \tag{10}$$

取单位脉冲序列 $\{\delta[n-1]\}_{n=0}^{N-1}$ 做卷积幂，可得：

$$\begin{aligned}&\delta^{0*}[n-1]=\delta[n],\\&\delta^{1*}[n-1]=\delta[n-1],\\&\delta^{2*}[n-1]=\delta[n-1]*\delta[n-1]=\delta[n-2],\\&\vdots\\&\delta^{k*}[n-1]=\underbrace{\delta[n-1]*\delta[n-1]*\cdots*\delta[n-1]}_{k}=\delta[n-k].\end{aligned} \tag{11}$$

由定义2.4，式可重新写为卷积幂级数的形式：

$$ago[n]=\sum_{k=0}^{n}\delta^{k*}[n-1] \tag{12}$$

接下来，引进单边Z变换(SSZT)将累加生成卷积序列变换到频率域，分析它在频率域的性质。首先可以把有限长的数据序列 $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ 延拓到无限长的序列 $\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$。通常有两种延拓方式，一种是周期延拓，另一种是零延拓。本文考虑零延拓，即直接在原数据序列的基础上直接补零。

定义 1.5 设 $\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$ 是单边无穷序列，即 $n=0,1,2,\cdots$，则其单边Z变换定义如下：

$$X[z]=SSZT(x[n])=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n} \tag{13}$$

其中，$z=re^{j\theta}$ 为复变量，$r=|z|$ 为模，$\theta=Arg(z)$ 为辐角。

引理 2.2 单位脉冲序列的单边Z变换为：

$$SSZT(\delta[n])\equiv 1 \tag{14}$$

证明：由单边Z变换的定义，可得：

$$SSZT(\delta[n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta z^{-n} = \delta[0] \cdot z^{-0} = 1$$

引理 2.3 设$\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$为单边无穷序列，其Z变换为$X[z]$，即$X[z] = SSZT(x[n])$，那么：

$$SSZT(x[n-k]) = z^{-k} X[z] \tag{15}$$

证明：由单边Z变换的定义，可得：

$$\begin{aligned} SSZT(x[n-k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-k] z^{-n} \\ &= z^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-k] z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} x[m] z^{-m} = z^{-k} X(z) \end{aligned}$$

由引理2.2和引理2.3，可得：

$$SSZT(\delta[n-k]) = z^{-k} SSZT(\delta[n]) = z^{-k} \tag{16}$$

引理 2.4 设$\{x[n]\}_{n=0}^{\infty}$和$\{y[n]\}_{n=0}^{\infty}$为两序列，其卷积为$w[n] = x[n] * y[n]$，并且其相应的单边Z变换依次为$X[z]$，$Y[z]$和$W(z)$，那么：

$$W[z] = X[z] \cdot Y[z] \tag{17}$$

应用式和引理2.4，可得单位脉冲序列$\{\delta[n-1]\}_{n=0}^{N-1}$的$k$次卷积幂的单边Z变换为：

$$\begin{aligned} SSZT\left(\delta^{k*}[n-1]\right) &= SSZT\left(\underbrace{\delta[n-1] * \cdots * \delta[n-1]}_{k}\right) \\ &= \underbrace{SSZT(\delta[n-1]) \cdot \ldots \cdot SSZT(\delta[n-1])}_{k} \\ &= \underbrace{z^{-1} \cdot \ldots \cdot z^{-1}}_{k} \\ &= z^{-k} \end{aligned}$$

定理 2.2 累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{\infty}$的Z变换为：

$$AGO[z] = SSZT(ago[n]) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \tag{18}$$

证明：由单边Z变换的定义，可得：

$$\begin{aligned} AGO[z] = SSZT(ago[n]) &= SSZT\left(\sum_{k=0}^{n} \delta^{*k}[n-1]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \delta^{*k}[n-1] z^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \delta[n-k] z^{-n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\delta[n-n] z^{-n}\right) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \end{aligned}$$

评注：公式(18)是无穷的几何级数，其收敛域是$|z^{-1}| < 1$，即$|z| > 1$，其收敛的结果为：

$$AGO[z] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots\cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{19}$$

这个结论和单位阶跃序列$u[n]$的单边Z变换结果一致：

$$\begin{aligned} U[z] = SSZT(u[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, (|z| > 1) \end{aligned} \tag{20}$$

3 基于卷积定义逆累加生成算子

本节将基于序列卷积运算给出逆累加生成算子的定义。首先从逆累加生成算子出发。

定义 3.1 设$\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$是长度为N的数据序列，那么逆累加生成算子定义如下：

$$y[n] = iago\left(x[n]\right) = x[n] - x[n-1] \tag{21}$$

以下定理通过序列卷积运算给出了逆累加生成算子的定义。

定理 3.1 设$\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$是长度为N的数据序列，$\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$是由公式定义的逆累加生成序列，那么逆累加生成算子可重新表示成卷积形式：

$$y[n] = x[n] * iago[n] \tag{22}$$

其中$\{iago[n]\}_{n=0}^{N-1}$为相应的卷积序列(单位脉冲响应函数)，并且其具体形式为两个间隔为1的单位脉冲序列之差，即：

$$iago[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \tag{23}$$

证明：由序列卷积运算的定义，可得：

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \cdot \delta[n-k] = x[n],$$

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n-1] &= \sum_{k=0}^{n} x[k] \cdot \delta[(n-1)-k] \\ &= x[n-1]. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) &= x[n] - x[n-1] \\ &= y[n] \end{aligned} \tag{24}$$

对比(24)式和(22)式，可得结论(23)式。

从定理3.1，可以推导出逆累加生成卷积序列的具体形式如下：

$$
\begin{aligned}
iago[0] &= \delta[0] - \delta[-1] = 1,\\
iago[1] &= \delta[1] - \delta[0] = -1,\\
iago[2] &= \delta[2] - \delta[1] = 0,\\
&\vdots\\
iago[N-1] &= \delta[N-1] - \delta[N-2] = 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

评注:逆累加生成卷积序列具体形式如下:

$$
iago[n] = \begin{cases} 1, n = 0,\\ -1, n = 1,\\ 0, n > 1. \end{cases} \tag{26}
$$

定理 3.2 逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{N-1}$的单边Z变换为:

$$
IAGO[z] = SSZT(iago[n]) = 1 - z^{-1} \tag{27}
$$

证明:由单边Z变换的定义,可得:

$$
\begin{aligned}
IAGO[z] &= SSZT(iago[n])\\
&= SSZT\left(\delta[n] - \delta[n-1]\right) = 1 - z^{-1}
\end{aligned}
$$

4 互逆关系

从定义2.1和定义3.1,可知累加生成算子和逆累加生成算子相互之间是互为逆算子的关系:

$$
\begin{aligned}
iago \cdot ago(x[n]) &= I(x[n]) = x[n],\\
ago \cdot iago(y[n]) &= I(y[n]) = y[n],
\end{aligned}
\tag{28}
$$

即

$$
\begin{aligned}
iago \cdot ago&: \{x[n]\}_{n=0}^{N-1} \to \{y[n]\}_{n=0}^{N-1} \to \{x[n]\}_{n=0}^{N-1},\\
ago \cdot iago&: \{y[n]\}_{n=0}^{N-1} \to \{x[n]\}_{n=0}^{N-1} \to \{y[n]\}_{n=0}^{N-1}.
\end{aligned}
$$

从这个角度来看,可得:

$$
ago \cdot iago = iago \cdot ago = I \tag{29}
$$

或

$$
\begin{aligned}
ago &= iago^{-1},\\
iago &= ago^{-1}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

那么,重新使用卷积定义的累加生成算子是否继续保持这种互逆的关系,或者更进一步,这种互逆关系在卷积运算下会变成什么样的形式,下面给出相关定理。

从引理2.1,单位脉冲序列$\delta[n]$对任何序列保持了卷积不变性,相当于卷积运算中的单位元素,即$\delta[n] = I[n]$。因此,可以定义类似于公式(30)的互逆的卷积序列。

定义 4.1 设$\{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$为序列,如果存在序列$\{g[n]\}_{n=0}^{N-1}$使得:

$$
f[n] * g[n] = \delta[n] \tag{31}
$$

则称$\{g[n]\}_{n=0}^{N-1}$为$\{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$的逆卷积序列,并且记为$f^{-1*}[n] = g[n]$。

根据卷积满足交换律:

$$
f[n] * g[n] = g[n] * f[n] = \delta[n] \tag{32}
$$

可得:

$$
\begin{aligned}
f^{-1*}[n] &= g[n],\\
g^{-1*}[n] &= f[n].
\end{aligned}
\tag{33}
$$

定理 4.1 累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{N-1}$互为逆卷积序列:

$$
ago[n] * iago[n] = \delta[n] \tag{34}
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
&ago[n] * iago[n]\\
&= (\delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta^{n*}[n-1]) * (\delta[n] - \delta[n-1])\\
&= (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta^{2*}[n-1] + \cdots + \delta^{n*}[n-1]) * \delta[n]\\
&-(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta^{2*}[n-1] + \cdots + \delta^{n*}[n-1]) * \delta[n-1]\\
&= \delta[n] - \delta^{(n+1)*}[n-1] = \delta[n] - \delta[-1] = \delta[n]
\end{aligned}
$$

从而公式(34)成立。

定理 4.2 累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{N-1}$的单边Z变换关于数的乘法互逆:

$$
AGO[z] \cdot IAGO[z] = 1, \ (|z| > 1) \tag{35}
$$

证明:从定理2.2,可得:

$$
\begin{aligned}
AGO[z] &= SSZT(ago[n])\\
&= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots, \quad |z| > 1
\end{aligned}
\tag{36}
$$

从定理2.2, 可得:

$$
IAGO[z] = SSZT(iago[n]) = 1 - z^{-1} \tag{37}
$$

然后,将公式(36)和(37)相乘可得结论。

评注:现在至少有三个观点看待累加生成算子的互逆关系:

第一,从序列的算子的观点看,由定义2.1和定义3.1,可得累加生成算子$ago()$和逆累加生成算子$iago()$之间的互逆关系,即:

$$
ago \cdot iago = I \tag{38}
$$

这里“·”应该理解为算子的复合操作,而算子中的单位元素应该理解为单位算子I。

第二,从算子对应的卷积序列来看,由定义2.2和定义3.2,可得累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{N-1}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{N-1}$之间的互逆关系,即:

$$
ago[n] * iago[n] = \delta[n] \tag{39}
$$

其中“*”是卷积运算,而卷积序列中的单位元素

变成了单位脉冲序列$\{\delta[n]\}_{n=0}^{N-1}$。

第三，从单边Z变换的观点看，由定理4.2，可得累加生成卷积序列的单边Z变换$AGO[z]$和逆累加生成卷积序列的单边Z变换$IAGO[z]$之间的互逆关系，即：

$$AGO[z]\cdot IAGO[z]=1 \tag{40}$$

此处“·”为普通的复数乘法，而复数中的单位元素退化为数1。

3 案例研究

例1. 设$\{x[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,1,1,1\}$，累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,1,1,1\}$. 计算两个序列的卷积结果并和传统累加生成算子的结果进行比较。

根据公式(4)，可得：

$$x[n]*ago[n]=\sum_{k=0}^{n}x[k]\cdot ago[n-k]$$

$$y[0]=x[0]*ago[0]=\sum_{k=0}^{0}x[k]\cdot ago[0-k]$$
$$=1\cdot 1=1,$$

$$y[1]=x[1]*ago[1]=\sum_{k=0}^{1}x[k]\cdot ago[1-k]$$
$$=1\cdot 1+1\cdot 1=2,$$

$$y[2]=x[2]*ago[2]=\sum_{k=0}^{2}x[k]\cdot ago[2-k]$$
$$=1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1=3,$$

$$y[3]=x[3]*ago[3]=\sum_{k=0}^{3}x[k]\cdot ago[3-k]$$
$$=1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1=4.$$

所以，由$\{x[n]\}_{n=0}^{3}$和累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{3}$卷积得到$\{y[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,2,3,4\}$，显然和传统的累加算子得到的累加生成序列一致。

例2. 设$\{y[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,2,3,4\}$，则逆累加生成卷积序列是：

$$\{iago[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,-1,0,0\}$$

计算两个序列的卷积结果并和传统的逆累加生成算子的结果进行比较。

根据公式，可得：

$$y[n]*iago[n]=\sum_{k=0}^{n}y[k]\cdot iago[n-k]$$

$$x[0]=y[0]*iago[0]=\sum_{k=0}^{0}y[k]\cdot iago[0-k]$$
$$=1\cdot 1=1,$$

$$x[1]=y[1]*iago[1]=\sum_{k=0}^{1}y[k]\cdot iago[1-k]$$
$$=1\cdot(-1)+2\cdot 1=1,$$

$$x[2]=y[2]*iago[2]=\sum_{k=0}^{2}y[k]\cdot iago[2-k]$$
$$=1\cdot 0+2\cdot(-1)+3\cdot 1=1,$$

$$x[3]=y[3]*iago[3]=\sum_{k=0}^{3}y[k]\cdot iago[3-k]$$
$$=1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot(-1)+4\cdot 1=1.$$

所以，由$\{y[n]\}_{n=0}^{3}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{3}$卷积得到的序列为$\{x[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,1,1,1\}$，显然和传统的逆累加算子得到的逆累加生成序列一致。

例3. 设累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,1,1,1\}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,-1,0,0\}$，计算两者的卷积并验证结果是单位脉冲序列$\{\delta[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,0,0,0\}$，即：

$$ago[n]*iago[n]=\delta[n]$$

根据公式(4)，设：

$$y[n]=ago[n]*iago[n]=\sum_{k=0}^{n}ago[k]\cdot iago[n-k]$$

$$y[0]=ago[0]*iago[0]=\sum_{k=0}^{0}ago[k]\cdot iago[0-k]$$
$$=1\cdot 1=1,$$

$$y[1]=ago[1]*iago[1]=\sum_{k=0}^{1}ago[k]\cdot iago[1-k]$$
$$=1\cdot(-1)+1\cdot 1=0,$$

$$y[2]=ago[2]*iago[2]=\sum_{k=0}^{2}ago[k]\cdot iago[2-k]$$
$$=1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1=0,$$

$$y[3]=ago[3]*iago[3]=\sum_{k=0}^{3}ago[k]\cdot iago[3-k]$$
$$=1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1=0.$$

所以，累加生成卷积序列$\{ago[n]\}_{n=0}^{3}$和逆累加生成卷积序列$\{iago[n]\}_{n=0}^{3}$的卷积结果为：

$$\{y[n]\}_{n=0}^{3}=\{1,0,0,0\}=\{\delta[n]\}_{n=0}^{3}$$

因此，累加生成卷积序列和逆累加生成卷积序列之间的互逆关系得到了验证。

例4. 设原始数据{x[n]}为1985-2021年世界发总电量(单位: Terawatt-hours)，数据见表1和图1。 数据来自2022年七月发布的BP世界能源统计年报[25]。

表1 1985-2021年世界总发电量(Unit: Terawatt-hours)

1985	1986	1987	1988	1989
9883.2	10178.0	10667.9	11138.0	11657.0
1990	1991	1992	1993	1994
11961.1	12222.7	12335.9	12599.4	12923.8
1995	1996	1997	1998	1999
13382.5	13797.1	14128.9	14511.1	14925.7
2000	2001	2002	2003	2004
15564.2	15799.8	16357.0	16935.3	17738.6
2005	2006	2007	2008	2009
18465.4	19167.0	20059.1	20436.5	20278.7
2010	2011	2012	2013	2014
21581.3	22268.9	22817.5	23452.4	24049.8
2015	2016	2017	2018	2019
24292.0	24924.2	25647.7	26677.3	27036.6
2020	2021	--	--	--
26889.2	28466.3	--	--	--

(1)将所有年份减去首年份1985,把首年份平移到0。设 $\{x[n]\}_{n=0}^{36}=\{9883.2,10178.0,\cdots,28466.3\}$ 和累加生成卷积序列 $\{ago[n]\}_{n=0}^{36}=\{1,1,\cdots,1\}$,然后计算两者的卷积,$y[n]=x[n]*ago[n]$,从而生成累加序列:

$$\{y[n]\}_{n=0}^{36}=\{9883.2,20061.2,\cdots,665217.1\}$$

卷积得到的累加序列见图2。

(2)使用GM(1,1)模型拟合卷积得到的累加序列 $\{y[n]\}_{n=0}^{36}$,可得到微分方程:

$$\frac{dy}{dt}-0.028995\cdot y(t)=10051.057012$$

和时间响应函数:

$$\hat{y}[n]=356527.683\cdot e^{(0.028995*n)}-346644.483$$

和相应的时间响应序列:

$$\{\hat{y}[n]\}_{n=0}^{36}=\{9883.2,20372.2,\cdots,665920.8\}$$

(3)设逆累加生成卷积序列 $\{iago[n]\}_{n=0}^{36}=\{1,-1,0,\cdots,0\}$,然后计算时间响应序列和逆累加生成卷积序列的卷积,即 $\hat{x}[n]=\hat{y}[n]*iago[n]$,从而得到原始数据的拟合值:

$$\{\hat{x}[n]\}_{n=0}^{36}=\{9883.2,10488.9,\cdots,28938.06\}$$

拟合结果见图3。拟合值和原始数据之间的误差列在表格2,其中每个时间数据相应的残差定义如下:

$$\varepsilon[n]=x[n]-\hat{x}[n] \tag{41}$$

每个时间数据相应的相对误差定义如下:

$$\Delta[n]=\left|\frac{\varepsilon[n]}{x[n]}\right|\times 100\% \tag{42}$$

综合所有时间数据,定义平均绝对百分比误差(MAPE)计算公式如下:

$$MAPE=\frac{1}{36}\sum_{n=1}^{36}\Delta[n]\times 100\%=1.7607\% \tag{43}$$

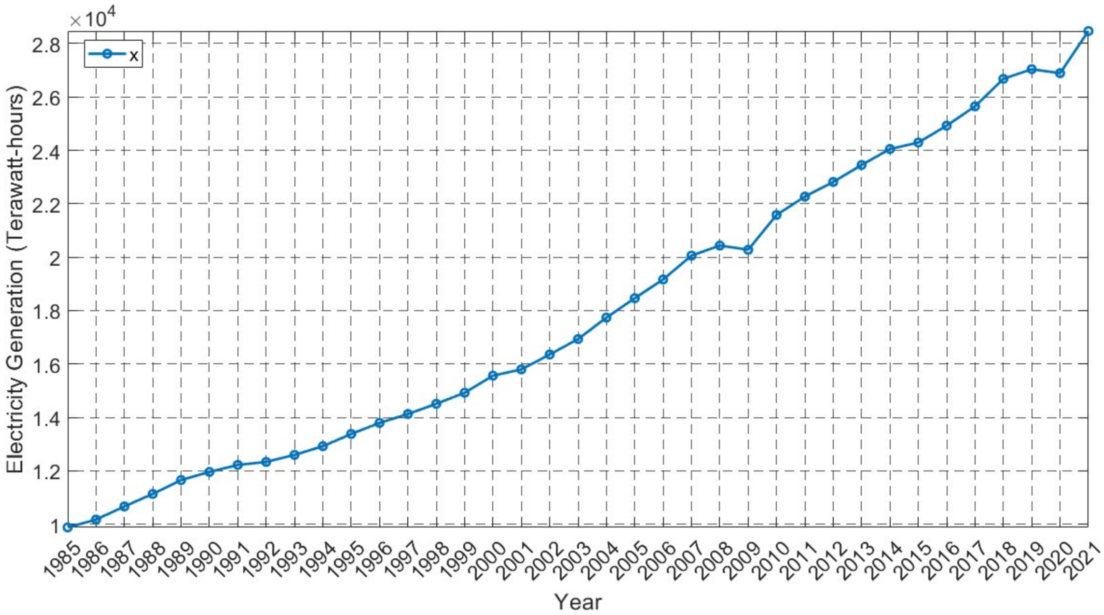

图1 1985-2021年世界总发电量(单位:Terawatt-hours)

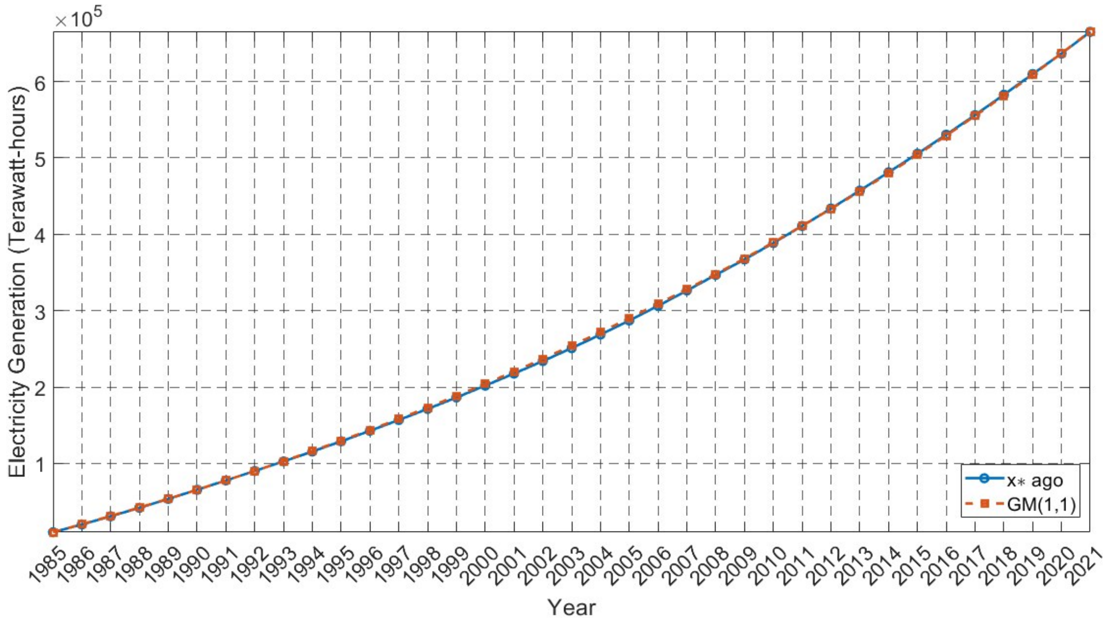

图2 卷积x[n]*ago[n]和GM(1,1)拟合值的比较（单位：Terawatt-hours）

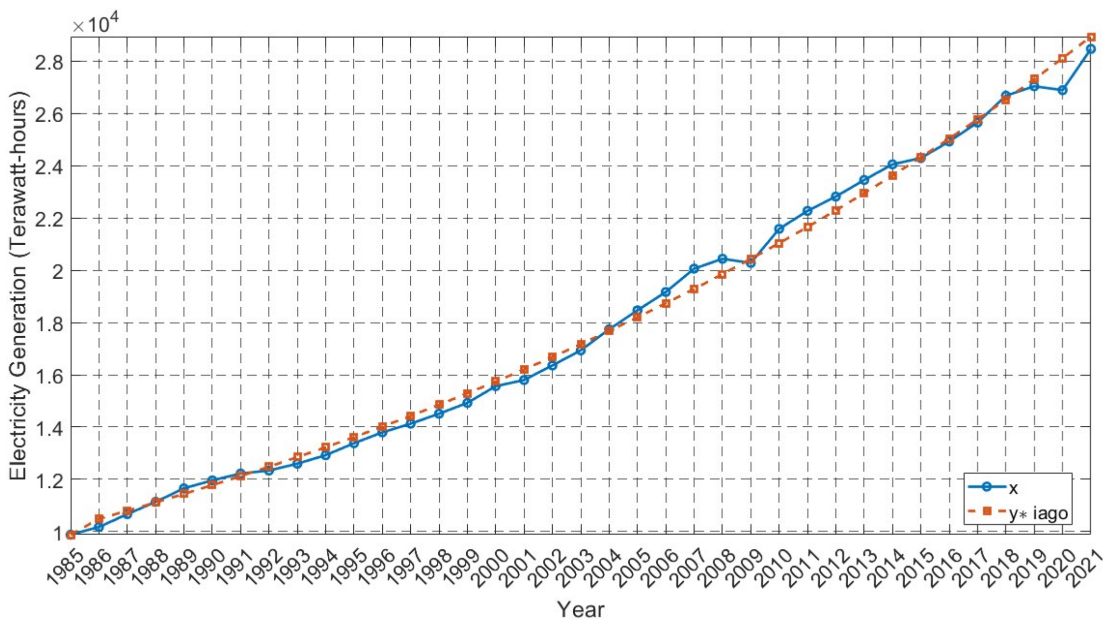

图3 卷积ŷ[n]*iago[n]和原始数据{x[n]}的比较（单位：Terawatt-hours）

4 结论

本文构造了累加生成算子相应的累加生成卷积序列实现了累加生成的运算，按照信号处理的观点，相当于找到了累加生成系统的脉冲响应函数在时域的离散序列。而借助Z变换得到了累加生成卷积序列在频率域的表达形式，相当于累加生成系统的传递函数。通过卷积和Z变换，可以从新的角度去理解累加生成算子和逆累加生成算子之间的互逆关系。在实际的案例中，数据序列和累加生成卷积序列做卷积生成了累加数据，数据序列和逆累加生成卷积序列做卷积生成了累减数据。累加生成卷积序列和逆累加生成卷积序列互为逆卷积序列。经过累加生成卷积序列做卷积生成的数据和灰色系统模型GM(1,1)的拟合度很高，验证了理论的正确性和方法的有效性。

本文后续可能开展的工作包括：

（1）累加阶数在灰色预测模型中具有重要作用，对应到累加生成卷积序列是什么？如果是整数m阶累加生成算子，是否对应累加生成卷积序列的m次重复卷积？

(2)接问题(1),分数阶累加生成算子相应的卷积形式如何实现?累加生成卷积序列会有分数阶卷积吗?

(3)通过构造累加生成卷积序列,对累加生成的机制是否有更深的理解,累加生成能够弱化原数据的随机性的机制是什么?为什么灰色建模必须经过累加生成?

参考文献(References):

[1] Gershenfeld N. The nature of mathematical modeling[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

[2] Deng J. Control problems of grey systems[J]. Systems and Control Letters, 1982, 1(5):288-294.

[3] 邓聚龙.粮食的灰色模糊预测与控制[J].华中工学院学报, 1983, 11(4):1-8.

[4] 邓聚龙.灰色动态模型(GM)及在粮食长期预测中的应用[J].大自然探索, 1984, 3:37-43.

[5] 张贵东,盛玉红.不确定微分方程中时变参数的极大似然估计[J].新疆大学学报(自然科学版), 2022, 39(4): 421-431.

[6] Putter H, Heisterkamp S H, Lange J M.A, et al. A Bayesian approach to parameter estimation in HIV dynamical Models[J]. Statistics in Medicine, 2022, 21(15):2199-2214.

[7] Jamili E, Dua V. Parameter estimation of partial differential equations using artificial neural network[J]. Computers and Chemical Engineering, 2021, 147:107221.

[8] Torres M. A machine learning method for parameter estimation and sensitivity analysis[C]// Computational Science – ICCS 2021:330-343.

[9] 邓聚龙.灰色预测与决策[M].武汉:华中科技大学出版社, 1986.

[10] 刘思峰,杨英杰,吴利丰.灰色系统理论及应用(第7版)[M].北京:科学出版社, 2014.

[11] 祝建华,黄煜,张欣之.对谈计算传播学:起源、理论、方法与研究问题[J].传播与社会学刊, 2018, 44: 1-24.

[12] Liu S, Lin Y. Grey Systems: theory and applications[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[13] Wu L, Liu S, Yao L, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2013, 252:1775-1785.

[14] Wu L, Liu S, Fang Z, et al. Properties of the GM(1,1) with fractional order accumulation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 252: 287-293.

[15] 孟伟,曾波.基于互逆分数阶算子的离散灰色模型及阶数优化[J].控制与决策, 2016, 31(10):1903-1907.

[16] 孟伟,曾波.分数阶算子与灰色预测模型研究[M].北京:科学出版社,2015.

[17] 吴正鹏,刘永菲.复数阶累加运算及其在广义复GM(1,1)中的应用[J].中国传媒大学学报(自然科学版), 2016, 23(1): 6-11.

[18] Wu Z, Chen J, Chai J, et al. Grey system model with complex order accumulation[J]. The Journal of Grey System, 2021, 33(1):98-117.

[19] 吴正鹏,陈见柯,柴剑平.复数阶累加的灰色系统模型[J].中国传媒大学学报(自然科学版), 2021, 28(6):39-46.

[20] Mao S, Gao M, Xiao X, et al. A novel fractional Grey System Model and its application[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40:5063-5076.

[21] Wei B, Xie N, Yang L. Understanding cumulative sum operator in grey prediction model with integral matching[J]. Commun. Nolinear Sci NumerSimulat, 2020, 82:105076.

[22] Lin C, Song Z, Liu S, et al. Study on mechanism and filter efficacy of AGO/IAGO in the frequency domain[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2021, 11(1):1-21.

[23] 冷建华.傅里叶变化[M].北京:清华大学出版社, 2004.

[24] 姚天任,江太辉.数字信号处理[M].武汉:华中理工大学出版社, 2000.

[25] BP. BP Statistical Review of World Energy June 2022[R/OL]. http://www.bp.com/statisticalreview. 2022.

编辑:王谦