

稀疏直线阵列优化设计算法综述

黎子皓^{1,2}, 郝程鹏¹, 闫晟¹

(1.中国科学院声学研究所, 北京 100190; 2.中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 稀疏直线阵列可以有效降低天线系统的复杂性和成本, 其优化设计是阵列信号处理领域近年来的研究热点之一。该文在介绍阵列波束方向图模型基础上, 将稀疏直线阵优化设计算法归为随机搜索、傅里叶变换、凸优化、矩阵分解和压缩感知五类, 对这五类算法的研究进展进行了综述, 并对稀疏直线阵优化设计的研究趋势进行了展望。

关键词: 稀疏直线阵列; 随机搜索; 傅里叶变换; 凸优化; 矩阵分解; 压缩感知;
中图分类号: O422 **文献标识码:** A

Review of algorithms for designing sparse linear arrays

Zihao Li^{1,2}, Chengpeng Hao¹, Sheng Yan¹

(1. Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100049, China)

Abstract: The sparse linear array can effectively reduce the complexity and cost of the antenna system, and its optimal design is one of the research hotspots in the field of array signal processing in recent years. Based on the introduction of the array beam pattern model, this paper classifies the sparse linear array optimization design algorithm into five categories: random search, Fourier transform, convex optimization, matrix decomposition, and compressed sensing. The research progress of these five categories is also carried out, and the research trend of designing sparse linear array design is also summarized in this paper.

Key words: sparse linear arrays; random search; Fourier transform; convex optimization; matrix decomposition; compressed sensing;

1 引言¹

随着天线与换能器在声呐、雷达和无线通信等领域的广泛应用, 波束方向图设计已经成为阵列信号处理领域的研究热点之一, 该技术首先在空间中部署一组辐射单元构成阵列, 然后借助波束形成技术获得强方向性、窄波束宽度和低旁瓣电平的波束,

从而提高发射或接收信号的信噪比。在实际工程中, 为了提升阵列的角度分辨率, 需要扩大阵列孔径和阵元数量。因此对于阵元间距不大于半波长的均匀直线阵列而言, 阵元数量的增加提升了系统的维护难度和成本。为了降低设备复杂性和成本, 稀疏直线阵列的优化设计引起了重视。该技术是在阵列孔径几乎不变的条件下, 即在保持阵列的角度分辨率不变的前提下, 减少阵元数量并优化各阵元的物理布局, 最终产生满足期望性能的波束方向图。由于这样设计出的大部分稀疏直线阵列的阵元间距大于半波长, 因此其阵元间的互耦效应与均匀直线阵列相比更弱, 在实际环境中具备更好的性能。

基金项目: 国家自然科学基金项目(61971412)

作者简介: 黎子皓(1996-), 男(汉族), 江西高安人, 中国科学院大学博士研究生。

通讯作者: 郝程鹏(1975-), 男(汉族), 黑龙江双鸭山人, 中国科学院声学研究所研究员, haochengp@mail.ioa.ac.cn

不论是在理论设计还是工程应用中,稀疏直线阵列的优化设计都是一个较难处理的问题^[1,2]。从波束方向图的数学模型考虑,其在空间域上是阵元激励和阵元位置的复指数求和形式,因此位置和激励的联合优化是一个非凸优化问题,优化的结果不一定是全局最优解;从工程应用角度考虑,虽然算法可以通过对阵元位置和激励添加约束条件达到控制波束形状的目的,但在实际环境中受到地形条件的影响,阵元位置与理论数值存在偏差,从而导致旁瓣电平产生误差,甚至会出现混叠现象。因此需要对这两方面因素综合考虑,设计符合需求的稀疏直线阵列。

为了能够详细地对稀疏直线阵列的设计算法进行综述,本文首先在第2章介绍直线阵的波束方向图理论和性能标准,并分析基于最小峰值旁瓣电平与基于方向图重构的稀疏直线阵列设计模型。之后在第3章根据这两类设计模型把现存的算法分随机搜索、傅里叶变换、凸优化、矩阵分解和压缩感知这五类,进而综述了各类设计算法的理论、发展和最新研究进展。第4章则通过仿真实验深入对比各类算法的优缺点。最后于第5章结合实际工程化的应用需求,指出稀疏直线阵列设计算法的未来发展趋势。

在讨论接下来的内容之前,先对一些符号进行定义: λ 表示信号的波长。 j 表示虚数单位,即 $j^2=-1$ 。 $k=2\pi/\lambda$ 表示信号的波数。 $\|x\|_1, \|x\|_2$ 分别表示向量 x 的1范数和2范数。 $\Phi(x)$ 表示对 x 作离散傅里叶变换, $\Phi^{-1}(x)$ 则表示对 x 作离散傅里叶逆变换。 $mainlobe$ 表示波束方向图的主瓣区域,而 $sidelobe$ 表示波束方向图的旁瓣区域。 x^T 表示对矩阵或向量 x 作转置运算, x^* 则表示对矩阵或向量 x 作共轭运算。

2 稀疏直线阵列优化设计模型

2.1 直线阵列的波束方向图模型

波束方向图是衡量直线阵列性能的重要指标,表征了发射电磁波时能量的空间分布情况。根据文献[3],直线阵列的波束方向图可以表示为阵因子和元因子乘积的形式

$$F(\theta) = f_e(\theta) \cdot f_a(\theta) \quad (1)$$

式中, $F(\theta)$ 为直线阵的波束方向图; $f_e(\theta)$ 表示每个辐射单元的方向图,被称作元因子; $f_a(\theta)$ 与阵列流形相关,被称作阵因子。可见波束方向图由元因子和阵因子共同决定。在大部分情况下,各向同性的辐

射单元构成直线阵列,即元因子 $f_e(\theta)=1$ 。因此对于阵元数量为 M 的线阵,其方向图可以仅用阵因子表示

$$F(\theta) = f_a(\theta) = \sum_{n=1}^M w_n e^{jk d_n \sin \theta} \quad (2)$$

式中, d_n 是第 n 个阵元与参考点之间的距离; w_n 是第 n 个阵元的复激励。不论是均匀直线阵还是稀疏直线阵,波束方向图模型均符合式(2),因此稀疏直线阵列的优化模型均是围绕式(2)建立的。对于直线阵列,常见的波束方向图有 Dolph-Chebyshev^[4]、Taylor-Kaiser 波束或余割平方波束^[5]等。

2.2 基于最小峰值旁瓣电平的优化模型

峰值旁瓣电平(peak side-lobe level, PSLL)作为波束方向图的重要指标,表征了天线阵列对旁瓣区域中干扰信号的抑制能力。因此该稀疏直线阵列的优化模型将 PSLL 作为优化的目标函数,在减少阵元数量并优化阵元位置、激励的同时,尽可能降低其波束方向图的 PSLL。假设设计一个稀疏直线阵列,其孔径为 L ,阵元数量为 N 的,且 N 小于同样孔径下按半波长排布的均匀线阵阵元数量 M ,定义该稀疏阵列所对应的波束方向图的峰值旁瓣电平为

$$PSLL(\mathbf{w}, \mathbf{d}) = \max_{\theta \in \text{sidelobe}} \left\{ 20 \log_{10} \left| \frac{F(\theta)}{F_{\max}} \right| \right\}, \quad (3)$$

式中, F_{\max} 表示稀疏直线阵列的波束方向图; $F(\theta)$ 在整个角度区域中的峰值。从式(3)可见,稀疏直线阵列的 PSLL 受到阵元的位置矢量 \mathbf{d} 和激励矢量 \mathbf{w} 的影响。因此基于最小化峰值旁瓣电平的优化模型可描述为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, \mathbf{d}} \quad & \text{PSLL}(\mathbf{w}, \mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & d_1 = 0, d_N = L \\ & d_i \neq d_j, i \neq j \\ & i, j = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)所表示的优化模型首次建立了稀疏直线阵列设计的理论基础,掀起了世界众多学者对于稀疏直线阵的设计算法的研究热潮,因此在20世纪90年代后陆续出现随机搜索、傅里叶变换和凸优化这三类设计算法。

2.3 基于方向图重构的优化模型

与最小化峰值旁瓣电平的优化模型不同,方向图重构的优化模型是在保证稀疏直线阵列的方向图与目标方向图之间足够近似的条件下,减少阵元数量并同时优化阵元的激励、位置。假设稀疏直线阵

列的阵元数量为 N ，用 η 表示合成方向图与目标方向图的理论误差，则该优化模型可以表示为

$$\begin{aligned} \min_{w,d} \quad & N \\ \text{s.t.} \quad & \int \left| F_{REF}(\theta) - \sum_{n=1}^N w_n e^{jkd_n \sin \theta} \right| d\theta \leq \eta \end{aligned} \quad (5)$$

式中， $F_{REF}(\theta)$ 表示已知辐射特性的目标方向图，例如已经确定波束形状的 Chebyshev 方向图；后面一项则表示稀疏阵列的波束方向图。对于此优化模型，众多学者发现矩阵分解和压缩感知这两类算法可以有效解得对应的阵元位置和激励。为了直观起见，图 1 表示了两类优化模型及其衍生出的设计算法之间的对应关系。

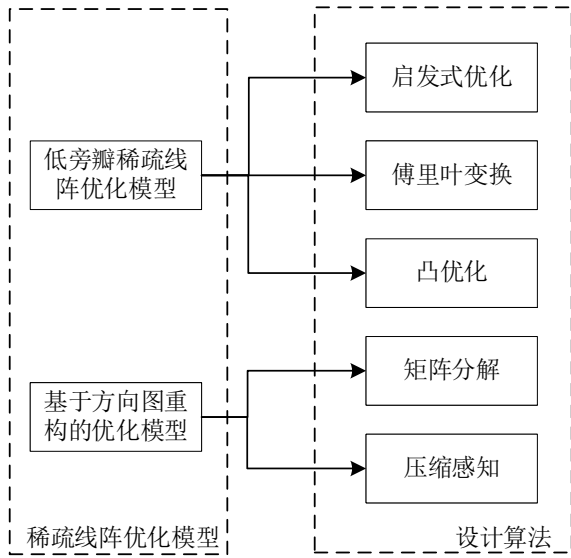


图 1 稀疏直线阵列优化模型与设计算法的对应关系

3 稀疏直线阵列设计算法

3.1 基于随机搜索的设计算法

随机搜索算法是一类广泛用于非凸优化领域的算法，其中包括模拟退火算法(simulated annealing, SA)^[6]、遗传算法(genetic algorithms, GA)^[7]、粒子群优化算法(particle swarm optimization, PSO)^[8]、差分进化算法(differential evolution, DE)^[9]、蚁群优化算法(ant colony optimization, ACO)等。随机搜索算法的目的均是 최소화适应度函数，而适应度函数可以根据优化需求自由定义，因此可以将随机搜索类算法用于 최소화峰值旁瓣电平的优化模型中，仅需将稀疏阵列的 PSLL 作为适应度函数即可。例如对于等幅激励的稀疏直线阵列，需把阵元位置作为优化变量，并把随机搜索算法的适应度函数改为 PSLL，

即

$$fitness = PSLL(d) \quad (6)$$

式中， $fitness$ 代表随机搜索算法的适应度函数；优化变量为阵元位置矢量 $d=[d_1, d_2, \dots, d_{N-1}]$ 。式(6)说明随机搜索算法在迭代过程中降低稀疏阵列的波束方向图的 PSLL，并同时获得各阵元的位置。伴随着计算机的计算性能提升，许多学者开始验证各种随机搜索算法在式(6)上的有效性。1994 年，Niell 和 Haupt^[10,11]两位学者理论分析 GA 算法用于设计等幅激励的稀疏直线阵的有效性，并通过仿真实验说明对于孔径为 99.5λ 的稀疏直线阵列，仅用 150 个阵元便可合成 PSLL 最低为 -22.09dB 的波束方向图。不幸的是，文献[10,11]中的 GA 算法针对的优化模型中，阵元位置只能在等间距的网格上，阵元位置的自由度受到了极大的限制，从而进一步限制了算法的性能，因此文献[12]引入了一种距离微扰策略，从而提出一种不等间距的网格优化模型，在优化算法同为 GA 算法的前提下，可获得 PSLL 为 -22.34dB 的波束方向图，性能显然优于文献[10,11]。然而这种微扰模型在优化过程中会造成阵元间距小于半波长的情况，导致在实际环境中增加了阵元间的互耦效应，因此 Chen 等人^[2]提出了一种改进的遗传算法(Modified GA, MGA)，在不等间距优化模型上增加阵元间距大于半波长的约束条件，从而在理论上解决互耦问题。除了 GA 算法，其他的基于随机搜索的稀疏直线阵列设计算法也相继被提出，例如基于阵元间距约束的改进粒子群算法(improved PSO, IPSO)^[13]，基于整数编码的遗传算法^[14]，适应策略差分进化算法(strategy adaptation DE, SaDE)^[15]，改进的差分进化算法(modified DE, MDE)^[16]，改进的蝙蝠算法(improved bat algorithm, IBA)^[17]等。

在随机搜索算法中，虽然式(6)的优化模型取得了杰出的成果，延伸出各种稀疏直线阵列设计算法，但是优化的变量仅有阵元位置，合成的波束方向图性能仍然不是最优。因此可以将阵元位置与激励合并成矢量进行联合优化，从而进一步提升性能，即表示为

$$fitness = PSLL(w, d) \quad (7)$$

式(7)的优化模型与式(6)相比，自变量自由度得到了提升，因此该模型设计的稀疏直线阵列的性能优于式(6)。Kurup 等人^[18]使用 DE 算法验证了这个结论，即通过仿真实验说明对于位置-激励联合优化的模型，设计的稀疏直线阵列所对应波束方向图比

仅优化位置的旁瓣电平低 3.5dB，性能获得显著提升，具备更强的抗干扰能力。除了 DE 算法之外，Murino 等人^[19]针对式(7)也提出了基于 SA 的稀疏直线阵列设计算法，并在孔径为 50λ 阵元数量为 25 的条件下，性能优于动态规划算法^[20]。2010 年，动态差分进化设计算法^[21]也被提出，与传统 DE 算法相比，其在突变过程中动态更新种群而不是逐代更新，从而可以更高效地收敛。Akdagli 等人则针对非对称赋形波束提出了旅游蚁群优化算法^[22]，从而可以设计发射余割平方波束或平顶波束的稀疏直线阵列。

为了能在降低旁瓣电平的同时增加阵列的角度分辨率，Zhang 等人^[23]在式(6)和式(7)的基础上，提出了旁瓣电平和主瓣宽度的混合优化模型，并用 a_1

和 a_2 分别调整这两者的权重，即

$$fitness = a_1 \times PSLL(\mathbf{w}, \mathbf{d}) + a_2 \times HPBW(\mathbf{w}, \mathbf{d}) \quad (8)$$

式中，HPBW 代表波束方向图的主瓣宽度。对于式(8)的优化模型，改进的遗传算法(improved GA, IGA)、改进遗传算法与粒子群算法的混合算法(improved GA-PSO, IGA-PSO)及改进的遗传算法-极值干扰简单粒子群算法(improved GA-extremum disturbed simple PSO, IGA-edPSO)^[23]均可设计出满意的稀疏直线阵列，详细仿真结果可见第 4 章。为了方便，我们总结了 GA、DE、PSO、ACO 这四个算法用于设计稀疏线阵的流程图，如图 2 所示。

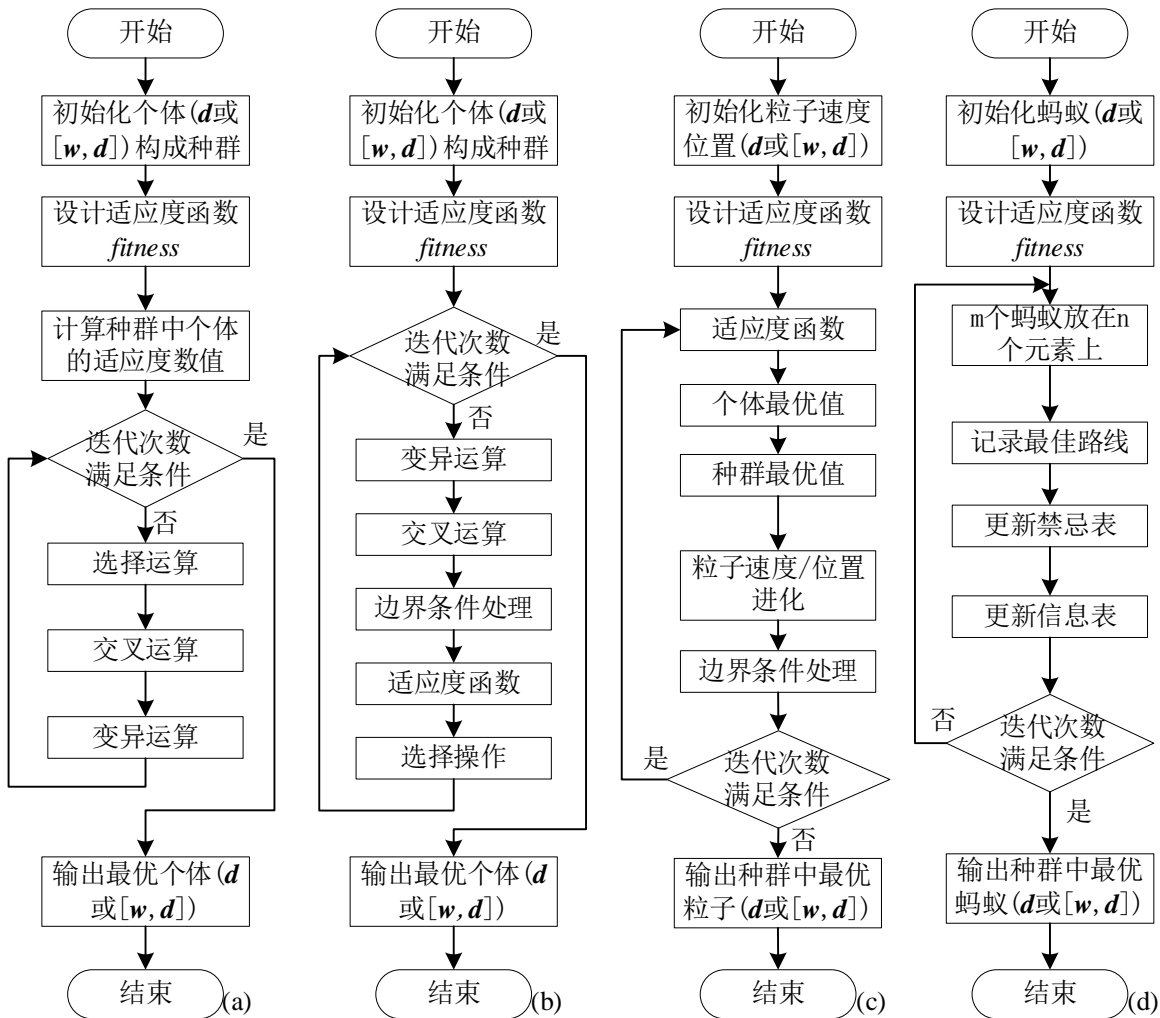


图 2 基于随机搜索的稀疏直线阵列设计流程图

根据式(2)，其数学表达式为阵元激励与阵元位置所对应复指数的加权求和，与傅里叶变换的形式类似，因此在 20 世纪下半叶，许多学者开始探索傅

3.2 基于傅里叶变换的设计算法

里叶变换和波束方向图之间的关联。

1991年,文献[24]从理论上论证FFT算法合成均匀直线阵列的波束方向图的可行性。2003年,Casimiro等人明确了均匀线阵的波束方向图与阵元激励间存在傅里叶变换的关系^[25],并通过仿真实验验证该关系的有效性,即对于 N 个阵元所构成的均匀直线阵列,其波束方向图模型满足式(2),假设阵元的间距为 Δd ,令 $u=\sin\theta$,阵列的波束方向图和阵元激励符合如下傅里叶变换关系

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{n=1}^N w_n e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta d u} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{j2\pi\frac{\Delta d}{\lambda}nu} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{j2\pi\frac{N\Delta d}{\lambda}u\frac{n}{N}} \\ &= N \cdot F^{-1}(w) \end{aligned} \quad (9)$$

从式(9)可以看出,均匀直线阵列的波束方向图和阵元激励互为傅里叶变换对,即可简单表示为

$$\begin{aligned} F(u) &= N \cdot F^{-1}(w) \\ w &= \frac{1}{N} \cdot F(F(u)) \end{aligned} \quad (10)$$

然而式(10)仅针对均匀直线阵列,即在阵元等间距排布的条件下才成立,无法直接用于稀疏线阵设计。为解决这个问题,2008年Keizer等人对算法做改进,提出了一种迭代傅里叶变换算法(iterative FFT techniques, IFT)^[26,27]用于设计等幅激励的稀疏线阵。该算法首先利用虚拟网格建立傅里叶变换与稀疏线阵设计的关系,即在线阵的排布空间上划分出虚拟网格,如图3所示,使用FFT求解网格位置对应的激励,相当于在网格上放置特定激励的阵元。为了进一步实现减少阵元数量和降低旁瓣电平的效果,IFT算法初始化波束方向图,每次迭代都降低波束的旁瓣电平并通过傅里叶逆变换求解对应的虚拟阵元激励,取前 N 个大的幅值确定为阵元位置,将激励置1,其余网格上的激励设置0,继续转换为波束方向图并降低旁瓣电平,以此循环求解稀疏阵列的阵元位置,算法流程图如图4所示。

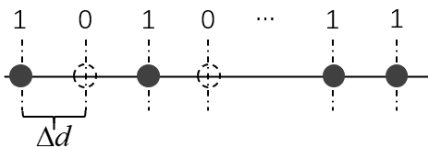


图2 阵列孔径确定下的虚拟网格

Keizer 通过仿真实验证明在阵列孔径为 99.5λ

且阵元数量为 132 的条件下,IFT 算法可以设计出PSLL 为-22.86dB 的等幅激励的稀疏直线。

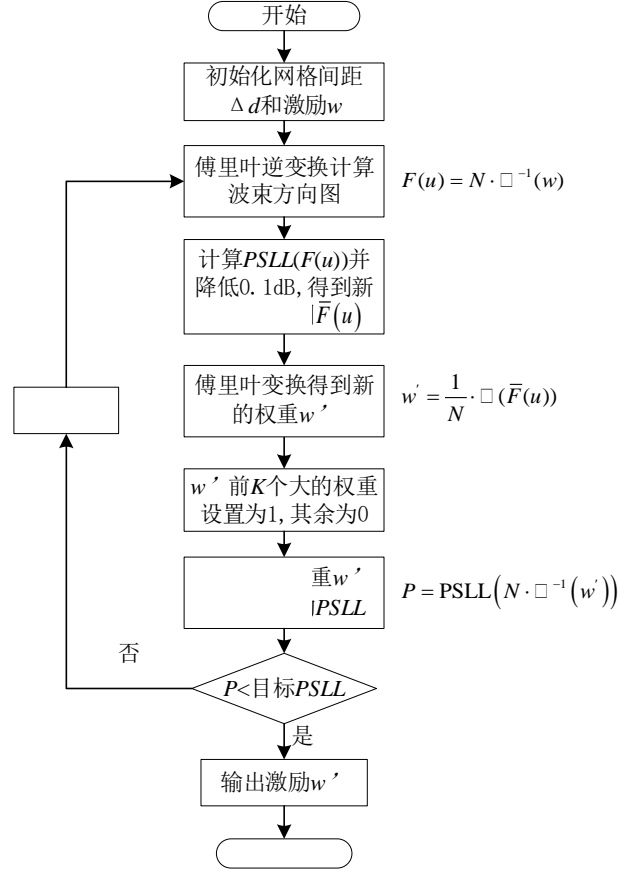


图3 基于迭代傅里叶变换的稀疏直线阵列设计流程图

继 IFT 算法之后,学者们也提出许多改进的算法。例如在 2012 年,一种改进的迭代傅里叶变换算法(modified IFT, MIFT)^[28]被提出,该算法通过引入自适应因子增加运算速度,并在稀疏率相同的情况下,设计的稀疏线阵的PSLL 低于 IFT 算法的结果。除此之外,GA 与 IFT、MIFT 的混合算法^[29,30]也被提出用于提高计算速度和全局搜索的性能。

3.3 基于凸优化的设计算法

凸优化是最优化里的一个重要子领域,是针对凸问题求解最优值的算法,与非凸优化相比,其在获得全局最优解上有较好性质。根据式(2)的数学模型,波束方向图与阵元激励服从线性关系,因此当优化变量仅为阵元激励的情况下,波束方向图设计可以转换为凸优化问题,即可表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & |F(\theta_i)|, i=1, \dots, L, \\ \text{s.t.} \quad & |F(\theta_j)| < U(\theta_j), j=1, \dots, M \\ & F(\theta_0) = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Lebret 和 Boyd 验证式(11)对于优化设计的有效性^[31],对于阵元数量为 24 且阵元间距为 0.56λ 的均

匀线阵,可以设计旁瓣电平低于-27.3dB的余割平方波束。Wang等人则进一步验证式(11)设计非均匀直线阵列的波束方向图的有效性^[32],并改进约束项减少阵元位置、激励的扰动带来的影响,但该算法考虑的是阵元位置已经确定的特定稀疏阵列,无法将阵元位置同样作为变量求解,从而缺乏通用性。

为了可以联合优化阵元位置和激励,稀疏恢复^[33-35]的理论被引入稀疏线阵的设计,且该理论恰好可以转化为凸优化问题。稀疏恢复指对于一个线性系统 $y=Ax$,在满足该线性系统的约束下,求解最稀疏的 x ,即向量 x 仅有少量非零数值。综上所述,可以表示为如下形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\| \\ \text{s.t.} \quad & y = Ax \end{aligned} \quad (12)$$

式中, y 是 m 维实矢量; A 是 $m \times n$ 维的实矩阵; x 是 n 维实向量。由于0范数作为目标函数是非凸问题,因此这里将目标函数松弛为1范数求解,这样式(12)便是凸优化问题。为了在式(12)的基础上提升 x 的稀疏度,Candes等人^[36]进一步提出加权 l_1 最小化算法(reweighted l_1 minimization, RL1),通过加权惩罚的思想增加解的稀疏度

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Wx\| \\ \text{s.t.} \quad & y = Ax \end{aligned} \quad (13)$$

式中, W 是对角矩阵,即 $W=\text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ 。每次迭代,矩阵 W 的第 i 个对角元素 w_i 按以下形式更新

$$w_i^{k+1} = \frac{1}{|x_i^k| + \varepsilon} \quad (14)$$

其中 $k+1$ 表示当前的迭代次数; ε 表示极小值; x_i 表示向量 x 的第 i 个元素。

2012年,Prisco将稀疏恢复理论和稀疏直线阵列设计相结合,提出了序列凸优化算法^[37],讲阵元激励的1范数作为目标函数,约束项改为旁瓣电平低于阈值函数的形式,即表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Zw\| \\ \text{s.t.} \quad & F(\theta_0) = 1 \\ & |F(\theta)|^2 \leq \text{UB}(\theta), \forall \theta \in \text{sidelobe} \end{aligned} \quad (15)$$

式中, θ_0 代表主瓣峰值对应的角度; $\text{UB}(\theta)$ 表示旁瓣区域上的阈值函数,用于约束波束方向图的旁瓣形状; Z 与式(14)的形式一致,表示权重矩阵,用于提升向量 x 的稀疏度。Fuchs则在式(15)的基础上,分别针对锐波束和赋形波束两种情况,通过不同的约束条件实现这两种波束模式的稀疏阵列设计^[38],即

可表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Zw\| \\ \text{s.t.} \quad & \text{(F.B.)} \begin{cases} \Re\{F(\theta_0)\} = 1 \\ |F(\theta)| \leq \text{UB}(\theta), \forall \theta \in \text{sidelobe} \end{cases} \\ & \text{(S.B.)} \begin{cases} |F(\theta) - F_{REF}(\theta)| \leq \eta, \forall \theta \in \text{mainlobe} \\ |F(\theta)| \leq \text{UB}(\theta), \forall \theta \in \text{sidelobe} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

式中,F.B.表示锐波束的约束条件;S.B.表示赋形波束的约束条件。实验结果说明不论是笔形波束还是赋形波束,式(16)可设计对应的稀疏线阵。为提升序列凸优化的计算效率和准确性,Pinchera等人提出了一种局部优化策略^[39],改进式(14)的加权因子,使得每次迭代后阵列的阵元成簇排布,再用聚类算法解得对应的阵元激励。同理,基于充气放气^[40]及阵元选择^[41]的稀疏阵列设计方法也被提出,这两类算法都是序列凸优化的改进算法,计算效率得到提升,并可用于阵元数量大于100的大规模稀疏线阵设计。

与式(15)和(16)所表现的稀疏恢复的思路不同^[38],Sartori等人提出基于几乎差集和凸编程的混合算法^[42,43],该算法分两步,第一步是利用几乎差集算法确定阵元位置,第二步便在阵元位置确定的前提下,通过凸优化算法获得阵元的激励。除此之外,基于交替凸优化策略的设计算法^[44]也被提出,该算法源自交替优化的思想,即每次迭代分别优化阵元激励和阵元位置,多次迭代后获得满足要求的稀疏直线阵列,该算法在优化过程中也增加阵元的最小间距约束,从而避免在实际环境中产生阵元间的互耦效应。

3.4 基于矩阵分解的设计算法

在线性代数中,矩阵分解的目的是提取出矩阵的重要特征,因此许多稀疏线阵的设计算法可通过矩阵分解减少阵元数量,例如矩阵束算法(matrix pencil method, MPM)、滤波对角算法(filter diagonalization method, FDM)等。MPM算法最早由Sarkar提出^[45],并由学者刘颜回等人引入至稀疏直线阵列设计领域^[46],即在目标波束形状确定的条件下,使用少于均匀线阵的阵元数量便可发射同样的波束。下面描述MPM算法用于设计稀疏直线阵列的步骤,先对式(2)生成的目标波束采样 $2N+1$ 个观测数据 $\{y(0), y(2), \dots, y(2N)\}$,并使用观测数据构造汉克尔矩阵 Y

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(L) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(2N-L) & y(2N-L+1) & \dots & y(2N) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中, N 和 L 都是超参数; N 需要大于均匀线阵的阵元数量 M ; L 则需要满足 $L \in [M-1, 2N-M]$ 。由于矩阵 \mathbf{Y} 包含了目标波束的信息, 因此对其作奇异值分解有

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (18)$$

式中, \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 都是酉矩阵; $\mathbf{\Sigma}$ 是由奇异值构成的对角矩阵, 且 $\mathbf{\Sigma}$ 中前 Q 个大的对角元素可被视为重要的奇异值, 而 Q 也可被视为稀疏阵列的阵元数量, 通过文献[44]的判定条件确定。因此, 在通过条件判定阵元数量 Q 的前提下, 为了获得稀疏阵列的阵元激励和位置, 将前 Q 个大的对角元素构成的对角矩阵 $\mathbf{\Sigma}_Q$ 重新带入式(18)得到低秩矩阵 \mathbf{Y}_Q , 进而对 \mathbf{Y}_Q 作广义特征分解

$$(\mathbf{Y}_{Q,f} - z^* \mathbf{Y}_{Q,l}) \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (19)$$

式中, $\mathbf{Y}_{Q,f}$ 表示 \mathbf{Y}_Q 去掉第一列的矩阵; $\mathbf{Y}_{Q,l}$ 表示 \mathbf{Y}_Q 去掉最后一列的矩阵; 特征值 z 与阵元位置 d 则有如下关系

$$\hat{d}'_i = \frac{1}{jk\Delta} \ln(\hat{z}'_i) \quad (20)$$

式中, \ln 表示自然对数; Δ 表示采样数据序列所对应 \mathbf{u} 的间隔。实验结果说明 MPM 可以用于设计发射锐波束的稀疏阵列^[46], 例如对于 20 阵元的切比雪夫阵列, MPM 算法仅使用 12 个阵元便可产生同样的波束形状。不幸的是, MPM 设计的非对称赋形波束存在较大的匹配误差, 原因是在式(20)中, 赋形波束所对应的广义特征值 $|z_i| \neq 1$, 这时求解的阵元位置 d_i 往往为复数, 但由于物理意义仅取其实际部, 从而造成波束方向图的误差。

为了解决这个问题, 学者刘颜回等人进一步^[47] 提出了前后向矩阵束算法 (forward back MPM, FBMPM), 将汉克尔矩阵 \mathbf{Y} 改为汉克尔-托普利兹矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$, 即

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_L \\ \mathbf{y}_L^* & \mathbf{y}_{L-1}^* & \dots & \mathbf{y}_0^* \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{y}_i = [y(i), y(i+1), \dots, y(2N-1)]^T$ 。FBMPM 算法的后续步骤与 MPM 算法的一致。文献[47]指出矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$ 相当于对 z 的极坐标增加了约束^[47], 使其在极坐标上贴近单位圆, 从而解决了赋形波束误差较大的问题。

继 MPM 算法和 FBMPM 算法之后, 出现一些

针对实时性的改进算法。2016 年, Shen 等人提出一种酉矩阵束算法 (unitary transform MPM, UMPM)^[48,49], 通过酉变换将低秩矩阵 \mathbf{Y} 转变为实矩阵, 显著提升了算法的计算效率。除此之外, 基于 FDM 的稀疏阵列设计算法^[50] 也被提出, 该算法最早被用于核磁共振领域^[51-53], 是一种计算效率较高的频率估计算法, 实验表明对于同一类稀疏线阵设计问题, FDM 与 MPM^[46] 相比所需的时间更少。

3.5 基于压缩感知的设计算法

压缩感知 (compressed sensing, CS)^[54-56] 是一种寻找欠定义线性系统的稀疏解的技术, 其数学模型与式(12)一致, 但与 3.3 节中稀疏恢复理论不同的是, 此处的约束形式为稀疏阵列的波束方向图与目标方向图之间的均方误差。综上所述, 基于压缩感知的稀疏阵列优化模型^[57,58] 可表示为

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{w}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{F}_{REF} - \mathbf{\Phi}\mathbf{w}\|_2 \leq \eta \end{aligned} \quad (22)$$

式中, \mathbf{F}_{REF} 是 m 维矢量, 表示目标方向图的采样数据构成的向量, 即 $\mathbf{F}_{REF} = [F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), \dots, F(\mathbf{u}_m)]$; $\mathbf{\Phi}$ 是 $m \times n$ 维观测矩阵, 可被视为图 2 网格构造而成的流形矩阵, 其第 i 列流形矢量恰好对应于第 i 个网格位置 d_i , 即其形式为

$$\mathbf{\Phi} \square \begin{bmatrix} e^{jkd_1 u_1} & \dots & e^{jkd_n u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jkd_1 u_m} & \dots & e^{jkd_n u_m} \end{bmatrix} \quad (23)$$

\mathbf{w} 为 n 维权重矢量, 即 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, 当 w_i 不为 0 时说明对应的网格位置 d_i 上有阵元, 当 w_i 为 0 时说明阵元不在 d_i 的位置上。对于式(22)的优化模型, 传统的 CS 算法及稀疏约束优化算法 (sparseness constrained optimization, SpaCO)^[57,58] 均可设计出符合要求的稀疏直线阵列, 实验结果说明当目标波束是由 20 阵元的切比雪夫阵列产生时, CS 和 SpaCO 算法仅用 13 个阵元便可产生同样的波束。

除此之外, 与传统的 CS 算法不同, 贝叶斯压缩感知 (Bayesian CS, BCS)^[59,60] 是一种基于最大化后验概率的算法, 该算法是贝叶斯参数学习^[61-63] 的延伸。详细的说, 对于一个线性系统 $\mathbf{g} = \mathbf{\Phi}\mathbf{w} + \mathbf{n}$, 假设 \mathbf{n} 是服从高斯分布的噪声矢量, \mathbf{w} 是确定性的信号, 因此观测数据 \mathbf{g} 也服从高斯分布。贝叶斯模型说明可通过观测数据 \mathbf{g} 推断出权重矢量 \mathbf{w} 对应分布的参数, 即可表示为

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2 | \mathbf{g}) = \frac{p(\mathbf{g} | \mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}{p(\mathbf{g})} \quad (24)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是超参数，代表 \mathbf{w} 对应的方差； σ 表示噪声的标准差。对于式(24)，BCS 算法可以迭代求解权重 \mathbf{w} 的分布函数所对应的均值和协方差矩阵，并借助快速相关向量机^[64]算法提升计算效率，实验表明 BCS 算法获得的权向量往往是极度稀疏的，因此为其用于稀疏直线阵列设计提供了理论基础。为了可以进一步提升算法性能，文献[65]则在 BCS 的基础上将其与多任务学习相结合，提出了多任务贝叶斯压缩感知(multitask BCS, MTBCS)算法，其把多个线性系统放在一起同时学习从而获得稀疏度更高的权向量。

2012 年，Oliver 等人首次^[66-69]将 BCS 用于设计稀疏阵列，但由于 BCS 算法解决的是实数问题，而稀疏直线阵列的模型是复数域模型，因此将其转换为实数表示形式，如下式所示

$$\begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{F}_{REF}\} \\ \Im\{\mathbf{F}_{REF}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re\{\boldsymbol{\Phi}\} & -\Im\{\boldsymbol{\Phi}\} \\ \Im\{\boldsymbol{\Phi}\} & \Re\{\boldsymbol{\Phi}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{w}\} \\ \Im\{\mathbf{w}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{n}\} \\ \Im\{\mathbf{n}\} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中， \Re 代表取实部； \Im 代表取虚部。从仿真结果可知，BCS 算法可以设计发射锐波束的稀疏阵列，但在赋形波束上，无法减少阵列的阵元数量，例如对于 16 阵元的余割平方波束阵列^[70]，BCS 算法设计的稀疏阵列需要 22 个阵元才能发射同样的波束，然而 MTBCS 算法^[66]可以设计非对称赋形波束的稀疏线阵，对于同样的 16 阵元余割平方波束，MTBCS 算法仅使用 12 个阵元即可合成此余割波束。2016 年，文献[71]进一步完善了 MTBCS 算法的工作，分析算法的超参数对匹配误差和稀疏度的影响，并确定合适的参数数值设置范围。

然而，根据式(22)和式(25)可以看出不论传统 CS 算法还是 BCS 算法，稀疏阵列的优化模型均需要构造虚拟网格的流形矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ ，因此设计效果受到网格间距影响，即如果网格间距不够大，真实的阵元位置恰好落在网格中间，而算法获得的阵元只能在网格上，这样便造成阵元位置的误差，如果 n 足够大，精度和稀疏度有所提升，然而会造成观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的维度增加，从而导致计算复杂度显著增加。该问题也被称作网格失配问题。为了缓解网格失配的影响，文献[72]提出了一种离网格贝叶斯压缩感知算法(off-grid BCS, OGBCS)，该算法在 BCS 算法的基础上使用均匀分布作为网格误差的分布函数，并迭代估计该分布函数的参数，提升重构方向图的匹配精度，但阵元数量仍无法进一步减少。除此之外，

后续也提出了连续压缩感知算法^[73]以及前向预测正交匹配追踪算法^[74]，连续压缩感知算法将阵元位置作为连续域的参数，并将优化问题转化为一个半正定规划问题，最终通过凸优化获得阵元位置；前向预测正交匹配追踪算法则从贪婪算法的角度解决式(22)的优化问题，提升计算效率。

4 典型算法仿真分析

为了能够详细对比上述五类算法的优缺点，本章分别针对最小峰值旁瓣电平及方向图重构这两个优化模型，采用典型算法进行仿真分析。由于图 1 表示这五类算法分别针对不同的优化模型，因此 4.1 节对比针对最小峰值旁瓣电平优化模型的设计算法，并将波束方向图的 PSL 作为算法的评价标准。4.2 节则仿真对比针对方向图重构优化模型的设计算法，并将波束方向图与目标方向图之间的均方误差(mean square error, MSE)作为算法评价标准，用符号 ξ 表示

$$\xi = \frac{\int_{-1}^1 |F_{REF}(\theta) - F(\theta)|^2 d\theta}{\int_{-1}^1 |F_{REF}(\theta)|^2 d\theta} \quad (26)$$

式中， $F(\theta)$ 为稀疏线阵产生的波束方向图； $F_{REF}(\theta)$ 表示目标波束方向图。仿真平台如下：Inter(R) Core(TM) i7-6700HQ，16GB 内存，MatlabR2018b 版本。

4.1 低旁瓣稀疏线阵设计算法分析

本节针对低旁瓣稀疏线阵优化模型，分别对仅优化位置及位置-激励联合优化的算法进行对比分析，且这两类实验均在阵列孔径为 9.744λ 且阵元数量为 17 条件下进行。对于仅优化位置的仿真实验，我们选择 MGA^[2]、IPSO^[13]、SaDE^[15]、MDE^[16] 和 IBA^[17] 这五个算法被用于对比分析。各算法对应的波束方向图如图 5 所示，且性能结果如表 1 所示。

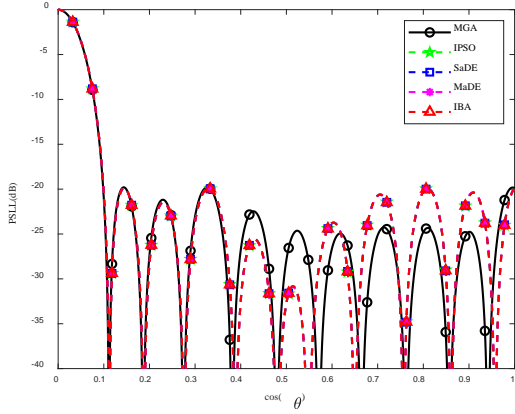


图 5 等幅激励的波束方向图

表 1 等幅激励的稀疏直线阵列性能参数

算法名称	等幅激励稀疏直线阵 ($L=9.744\lambda, N=17$)		
	PSLL (dB)	最小阵元间距 $\Delta d_{\min}(\lambda)$	最大阵元间距 $\Delta d_{\max}(\lambda)$
MGA	-19.79	0.5002	0.7868
IPSO	-19.89	0.5000	0.8403
SaDE	-19.89	0.5000	0.8400
MDEA	-19.90	0.5000	0.8403
IBA	-19.89	0.5000	0.8396

对于位置-激励联合优化的仿真实验，我们对比文献[23]中的 IGA、IGA-PSO 及 IGA-edPSO 这三个算法的仿真结果，图 6 给出了对应的波束方向图，表 2 给出了详细地性能参数结果。

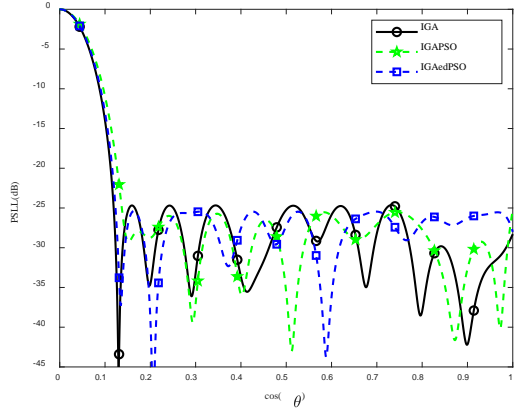


图 6 位置-激励联合优化的波束方向图

表 2 位置-激励联合优化的稀疏直线阵列性能参数

算法	位置-激励联合优化的稀疏直线阵 ($L=9.744\lambda, N=17$)		
	PSLL (dB)	最小阵元间距 $\Delta d_{\min}(\lambda)$	最大阵元间距 $\Delta d_{\max}(\lambda)$
IGA	-24.73	0.5120	0.7470
IGA-PSO	-25.20	0.5030	0.7540
IGA-edPSO	-25.46	0.5020	0.8070

由上述的仿真结果可见：

(1) 对于仅优化阵元位置的仿真实验，MDEA 算法设计的稀疏直线阵列性能最好，其波束方向图的 PSLL 为 -19.90dB。在位置-激励联合优化的设计算法中，IGA-edPSO 算法设计的稀疏直线阵列性能

最好，其波束方向图的 PSLL 为 -25.46dB。

(2) 根据表 1 和表 2 的结果，位置-激励联合优化的算法性能均比仅优化位置的算法性能好，波束方向图的 PSLL 至少低 4.83dB，具备更强的抗干扰能力。

(3) 各稀疏直线阵列的阵元间距大于半波长，因此从理论上避免阵元间的互耦效应的影响，因此具备实用性。

4.2 方向图重构的稀疏直线设计算法分析

在本节我们针对方向图重构的优化模型，将对称的锐波束和非对称的赋形波束作为目标波束进行仿真分析。我们首先考虑目标波束为锐波束的情况，即选择 20 阵元的 Chebyshev 波束作为目标波束，且其 PSLL 为 -30dB。之后我们采用 FDM^[50]、MPM^[46]、BCS^[66] 和 SpaCO^[57] 这四个算法做仿真对比。这四个算法设计的稀疏直线阵列对应的波束方向图如图 7 所示。表 3 给出这四个算法的性能结果。

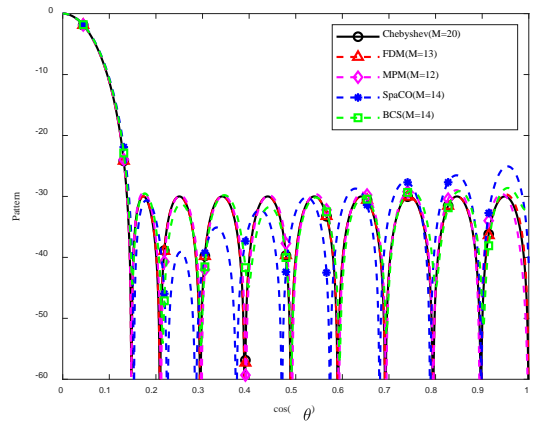


图 7 原始与重构的 Chebyshev 波束对比图

表 3 Chebyshev 稀疏直线阵列性能参数

算法	Chebyshev 波束稀疏直线阵			
	阵元数量 N	最小阵元间距 $\Delta d_{\min}(\lambda)$	阵列孔径 $L(\lambda)$	MSE
MPM	12	0.8330	9.268	1.016×10^{-4}
SpaCO	13	0.5000	10.00	1.571×10^{-4}
BCS	14	0.3087	9.500	1.105×10^{-3}
FDM	13	0.6928	9.444	1.943×10^{-3}

由图 7 和表 3 可见：

(1) 四个算法设计的稀疏直线阵列所需要的阵元数量均少于目标均匀直线阵列的阵元数量，即至少减少 30% 的阵元数量，并且方向图的误差数量级均在 10^{-2} 以下，说明均实现 Chebyshev 稀疏直线阵列设计。

(2) MPM 算法所需的阵元数量最少，并且匹配误差最低，性能优于其他三个算法。

(3) 根据表 3 中的阵元间距参数，BCS 算法的阵元间距小于半波长，其设计的稀疏直线阵列在实

际环境中会存在互耦效应，从而影响波束方向图的性能。

对于非对称的赋形波束实验，我们选择文献[75]中 30 个阵元的均匀直线阵产生的余割平方方向图作为目标波束，并对比 MPM^[46]、BCS^[66]、UMPM^[49]及 FBMPM^[47]这四个算法的仿真结果。图 8 给出了各算法仿真的波束方向图，表 4 则列出了算法的性能结果。

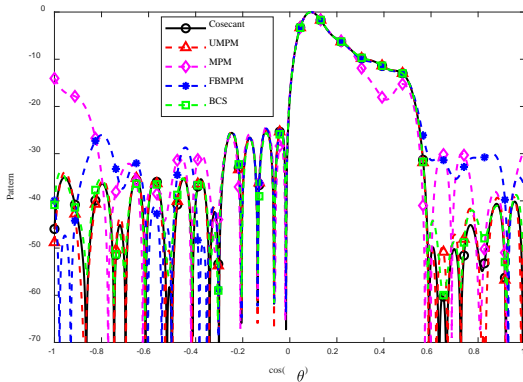


图 8 原始与重构的余割平方波束对比图

表 4 余割平方稀疏直线阵列性能参数

算法	余割平方波束稀疏直线阵			
	阵元数量 N	最小阵元间距 $\Delta d_{\min}(\lambda)$	阵列孔径 $L(\lambda)$	MSE
UMPM	22	0.5349	14.16	2.490×10^{-5}
MPM	22	0.5073	14.50	7.170×10^{-2}
FBMPM	22	0.5383	14.49	3.300×10^{-3}
BCS	46	0.0145	14.50	8.417×10^{-5}

由图 8 和表 4 可以得出结论：

(1) 四种设计算法中，BCS 算法需要的阵元数量明显多于均匀线阵的阵元数量，因此其无法设计发射余割平方波束的稀疏线阵。其他三个算法使用 22 个阵元即可合成误差低于 10^{-1} 的余割平方波束。

(2) 当阵元数量均为 22 的情况下，UMPM 算法设计的稀疏阵列的匹配误差最小，从图 8 中也可看出 UMPM 算法重构的余割平方波束更接近目标波束的形状，性能更好。

5 展望

经过 30 年的发展，稀疏直线阵设计算法已经取得了辉煌的成果，然而实际应用需求使得广大学者将研究重心从对算法性能的无限追求转到把算法落实在工程应用中，因此如何在复杂环境中准确排布稀疏直线阵列仍是目前亟待解决的一大难题。

本文首先介绍两类优化设计模型，并回顾了五类经典算法的发展历史及最新进展，进而综述了算法的原理和优缺点。基于上述内容，在稀疏线阵设

计领域仍有以下三方面问题值得学者们进行深入研究：

(1) 阵元在实际环境中的排布位置与理论值往往会存在一定的偏差，阵元位置的偏差会造成波束方向图产生误差，从而影响阵列的性能。阵元数量越多，这种偏差会进一步累积。因此，对于实际阵列结构的误差分析及减少误差的影响是稀疏直线阵列设计领域亟待攻克的难题。

(2) 现有大部分算法都是针对阵元数量较少的情况，然而面对阵元数量大于 100 的大规模稀疏直线阵列，算法的计算复杂度较高，因此稀疏直线阵列的快速高精度设计也是一个需要解决的问题。

(3) 基于压缩感知的设计算法表现出许多优良性质，例如高匹配精度，但是其自身存在网格失配问题限制了算法在稀疏度上的性能，如何有效地解决这个问题是一个需要突破的方向。

参考文献

- [1] Kumar B P, Branner G R. Design of unequally spaced arrays for performance improvement[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1999, 47(3): 511-523.
- [2] Chen K, He Z, Han C. A modified real GA for the sparse linear array synthesis with multiple constraints[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(7): 2169-2173.
- [3] Van Trees H L. Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory[M]. John Wiley & Sons, 2004
- [4] Dolph C L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and side-lobe level[J]. Proceedings of the IRE, 1946, 34(6): 335-348.
- [5] Taylor T T. Design of line-source antennas for narrow beamwidth and low side lobes[J]. Transactions of the IRE Professional Group on Antennas Propagation, 1955, 3(1): 16-28.
- [6] Kirkpatrick S, Gelatt C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing[J]. science, 1983, 220(4598): 671-680.
- [7] Holland J H. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence[M]. MIT press, 1992.

- [8] Eberhart R C, Shi Y, Kennedy J. Swarm intelligence[M]. Elsevier, 2001.
- [9] Storn R, Price K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. Journal of global optimization, 1997, 11(4): 341-359.
- [10] Neill D J O. Element placement in thinned arrays using genetic algorithms[C]//Proceedings of OCEANS'94,1994: II/301-II/306 vol.2.
- [11] Haupt R L. Thinned arrays using genetic algorithms[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1994, 42(7): 993-999.
- [12] 付云起,袁乃昌,毛钧杰.基于遗传算法和模拟退火的不等间距稀布阵的设计[J].电子与信息学报,2001(07):700-704.
- [13] 刘姜玲,王小漠.改进粒子群算法综合有间距约束的稀布阵列[J].微波学报,2010,26(05):7-10.
- [14] 何学辉,朱凯然,吴顺君.基于整数编码遗传算法的稀疏阵列综合[J].电子与信息学报,2010,32(09):2277-2281.
- [15] Goudos S K, Siakavara K, Samaras T, et al. Sparse linear array synthesis with multiple constraints using differential evolution with strategy adaptation[J].IEEE Antennas Wireless Propagation Letters, 2011, 10: 670-673.
- [16] 瞿颜,郭陈江,丁君.基于改进差分进化算法的天线阵列优化研究[J].计算机仿真,2013(7):174-178.
- [17] Pan Y, Zhang J. Synthesis of linear symmetric antenna arrays using improved bat algorithm[J]. Microwave Optical Technology Letters,2020, 62 (6): 2383-2389.
- [18] Kurup D, Himdi M, Rydberg A. Synthesis of Uniform Amplitude Unequally Spaced Antenna Arrays Using the Differential Evolution Algorithm[J]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on,2003, 51: 2210-2217.
- [19] Murino V, Trucco A, Regazzoni C S. Synthesis of unequally spaced arrays by simulated annealing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(1): 119-122.
- [20] Arora R, Krisnamacharyulu N. Synthesis of unequally spaced arrays using dynamic programming[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation,1968, 16(5): 593-595.
- [21] Lin C, Qing A, Feng Q. Synthesis of Unequally Spaced Antenna Arrays by Using Differential Evolution[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2010, 58 (8): 2553-2561.
- [22] Akdagli A A, Guney K, Karaboga D. Touring Ant Colony Optimization Algorithm for Shaped-Beam Pattern Synthesis of Linear Antenna[J]. Electromagnetics, 2006, 26(8): 615-628.
- [23] Zhang S, Gong S-X, Guan Y, et al. A novel IGA-EDSPSO hybrid algorithm for the synthesis of sparse arrays[J].Progress In Electromagnetics Research,2009, 89: 121-134.
- [24] Stirland S. Fast Antenna Synthesis by an Iterative FFT Procedure[C]//1991 21st European Microwave Conference,1991: 745-750.
- [25] Casimiro A, Azevedo J. Computing of antenna arrays with an unified theory[C]//6th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, 2003. Proceedings. 2003,2003: 194-197.
- [26] Keizer W P. Linear array thinning using iterative FFT techniques[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 2008, 56(8): 2757-2760.
- [27] Keizer W P. Low-sidelobe pattern synthesis using iterative Fourier techniques coded in MATLAB [EM programmer's notebook][J].IEEE Antennas Propagation Magazine,2009, 51 (2): 137-150.
- [28] Wang X-K, Jiao Y-C, Tan Y Y. Gradual thinning synthesis for linear array based on iterative Fourier techniques[J].Progress In Electromagnetics Research,2012, 123: 299-320.
- [29] Cui C, Li W T, Ye X T, et al. Hybrid genetic algorithm and modified iterative Fourier transform algorithm for large thinned array synthesis[J].IEEE Antennas Wireless Propagation Letters,2017, 16: 2150-2154.
- [30] Wang Z, Sun Y, Yang X, et al. Hybrid optimisation method of improved genetic algorithm and IFT for linear thinned array[J].The Journal of Engineering,2019, 2019 (20): 6457-6460.
- [31] Leuret H, Boyd S. Antenna array pattern synthesis via convex optimization[J]. IEEE transactions on signal processing,1997, 45 (3): 526-532.
- [32] Wang F, Balakrishnan V, Zhou P Y, et al. Optimal array pattern synthesis using semidefinite programming[J].IEEE Transactions on Signal Processing,2003, 51 (5): 1172-1183.
- [33] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE signal processing magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [34] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 2006, 59(8): 1207-1223.

- [35] Baraniuk R G. Compressive sensing [lecture notes][J]. IEEE signal processing magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [36] Candes E J, Wakin M B, Boyd S P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization[J]. Journal of Fourier analysis applications, 2008, 14 (5-6): 877-905.
- [37] Prisco G, D'urso M. Maximally sparse arrays via sequential convex optimizations[J]. IEEE Antennas Wireless Propagation Letters, 2012, 11: 192-195.
- [38] Fuchs B. Synthesis of Sparse Arrays With Focused or Shaped Beampattern via Sequential Convex Optimizations[J].IEEE Transactions on Antennas Propagation,2012, 60 (7): 3499-3503.
- [39] Pinchera D, Migliore M D, Schettino F, et al. An Effective Compressed-Sensing Inspired Deterministic Algorithm for Sparse Array Synthesis[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 66(1): 149-159.
- [40] Pinchera D, Migliore M D, Panariello G. Synthesis of Large Sparse Arrays Using IDEA (Inflating-Deflating Exploration Algorithm)[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2018, 66 (9): 4658-4668.
- [41] Wang X, Aboutanios E. Sparse array design for multiple switched beams using iterative antenna selection method[J]. Digital Signal Processing, 2020: 102684.
- [42] Sartori D, Oliveri G, Manica L, et al. Hybrid design of non-regular linear arrays with accurate control of the pattern sidelobes[J].IEEE transactions on antennas propagation, 2013, 61 (12): 6237-6242.
- [43] Sartori D, Manica L, Oliveri G, et al. Design of thinned arrays with controlled sidelobes by ADS-CP strategy[C]//The 8th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2014),2014: 662-665.
- [44] You P, Liu Y, Chen S-L, et al.Synthesis of Unequally Spaced Linear Antenna Arrays With Minimum Element Spacing Constraint by Alternating Convex Optimization[J].IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters,2017, 16: 3126-3130.
- [45] Sarkar T K, Pereira O. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials[J].IEEE Antennas and Propagation Magazine,1995, 37 (1): 48-55.
- [46] Liu Y H, Nie Z P, Liu Q H. Reducing the number of elements in a linear antenna array by the matrix pencil method[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2008, 56 (9): 2955-2962.
- [47] Liu Y H, Liu Q H, Nie Z P. Reducing the Number of Elements in the Synthesis of Shaped-Beam Patterns by the Forward-Backward Matrix Pencil Method[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2010, 58 (2): 604-608.
- [48] 沈海鸥,王布宏,刘新波.基于酉变换-矩阵束的稀布线阵方向图综合[J].电子与信息学报,2016,38(10):2667-2673.
- [49] Shen H, Wang B, Li X. Shaped-beam pattern synthesis of sparse linear arrays using the unitary matrix pencil method[J].IEEE Antennas Wireless Propagation Letters,2016, 16: 1098-1101.
- [50] Liu J, Zhao Z, Yuan M, et al. The filter diagonalization method in antenna array optimization for pattern synthesis[J].IEEE Transactions on Antennas Propagation,2014, 62 (12): 6123-6130.
- [51] Hu H, Van Q N, Mandelshtam V A, et al. Reference deconvolution, phase correction, and line listing of NMR spectra by the 1D filter diagonalization method[J].Journal of Magnetic resonance, 1998, 134 (1): 76-87.
- [52] Mandelshtam V A, Taylor H S. A low-storage filter diagonalization method for quantum eigenenergy calculation or for spectral analysis of time signals[J].The Journal of chemical physics,1997, 106 (12): 5085-5090.
- [53] Mandelshtam V A, Taylor H S, Shaka A J. Application of the Filter Diagonalization Method to One- and Two-Dimensional NMR Spectra[J].Journal of Magnetic Resonance,1998, 133 (2): 304-312.
- [54] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2006, 52 (4): 1289-1306.
- [55] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2005, 51 (12): 4203-4215.
- [56] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM review,2001, 43 (1): 129-159.
- [57] Zhang W, Li L, Li F. Reducing the number of elements in linear and planar antenna arrays with sparseness constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(8): 3106-3111.
- [58] Zhao X, Yang Q, Zhang Y. Compressed sensing approach for pattern synthesis of maximally sparse non-uniform linear array[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2013, 8(5): 301-307.
- [59] Ji S, Dunson D, Carin L. Multitask Compressive Sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2009, 57 (1): 92-106.
- [60] Ji S, Xue Y, Carin L. Bayesian Compressive Sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2008, 56 (6):

2346-2356.

- [61] Tipping M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. Journal of machine learning research,2001, 1 (Jun): 211-244.
- [62] Tipping M E. The relevance vector machine[C]//Advances in neural information processing systems,2000: 652-658.
- [63] Tipping M E. Bayesian inference: An introduction to principles and practice in machine learning[C]//Summer School on Machine Learning,2003: 41-62.
- [64] Tipping M E, Faul A C. Fast marginal likelihood maximisation for sparse Bayesian models[C]//AISTATS,2003.
- [65] Ji S, Dunson D, Carin L. Multitask compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 57(1): 92-106.
- [66] Oliveri G, Carlin M, Massa A. Complex-Weight Sparse Linear Array Synthesis by Bayesian Compressive Sampling[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2012, 60 (5): 2309-2326.
- [67] Oliveri G, Massa A. Bayesian Compressive Sampling for Pattern Synthesis With Maximally Sparse Non-Uniform Linear Arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2011, 59 (2): 467-481.
- [68] Massa A, Rocca P, Carlin M, et al. Efficient synthesis of sparse arrays as the solution of an inversion problem within the Bayesian compressive sensing framework[C]//2012 IEEE International Conference on Wireless Information Technology and Systems (ICWITS),2012: 1-4.
- [69] Oliveri G, Carlin M, Massa A. BCS-based formulations for antenna arrays synthesis[C]//2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP),2012: 1500-1501.
- [70] Isernia T, Bucci O M, Fiorentino N. Shaped beam antenna synthesis problems: Feasibility criteria and new strategies[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1998, 12(1): 103-138.
- [71] 沈海鸥,王布宏,李龙军.基于多任务贝叶斯压缩感知的稀疏可重构天线阵的优化设计 [J]. 电子学报,2016,44(09):2168-2174.
- [72] Lin J, Ma X, Yan S, et al. Pattern synthesis of sparse linear array by off-grid Bayesian compressive sampling[J].Electronics Letters,2015, 51 (25): 2141-2143.
- [73] Lin J, Ma X, Hao C, et al. Maximally sparsen arrays via continuous compressive sensing[C]//OCEANS 2016 - Shanghai,2016: 1-4.
- [74] Liu J, Wang J, Gao Z, et al. A method based on preconditioned look ahead orthogonal matching pursuit for sparse array synthesis[C]//2018 IEEE MTT-S International Wireless Symposium (IWS),2018: 1-3.
- [75] Akdagli A, Guney K. Shaped - beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm[J]. Microwave Optical Technology Letters,2003, 36 (1): 16-20.